



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală – Constanța, 17.02.2018

Clasa a VI-a

Barem de corectare și notare

SUBIECTUL 1

a) Se consideră șirul: primul număr este a , al doilea număr este b , al treilea număr este câtul dintre al doilea și primul, al patrulea număr este câtul dintre al treilea și al doilea etc., unde $a, b \in \mathbb{N}^*$. Ce număr este pe locul 2018 ?

b) Dacă $\frac{17}{a+3} + \frac{17}{b+5} + \frac{17}{c+7} + \frac{17}{d+9} = 18$, cu $a, b, c, d \in \mathbb{Q}_+$, calculați $\frac{a+1}{a+3} + \frac{b+3}{b+5} + \frac{c+5}{c+7} + \frac{d+7}{d+9}$.

SOLUȚIE

a) Șirul se scrie : $a, b, \frac{b}{a}, \frac{b}{a} : b = \frac{1}{a}, \frac{1}{a} : \frac{b}{a} = \frac{1}{b}, \frac{1}{b} : \frac{1}{a} = \frac{a}{b}, \frac{a}{b} : \frac{1}{b} = a, b, \dots$ 1p

Observă repetiție după șase pași 1p

Cum $2018 = 6 \cdot 336 + 2 \Rightarrow$ pe locurile de forma $6k + 2$, se situează numărul b 1p

b) $\frac{a+1}{a+3} + \frac{b+3}{b+5} + \frac{c+5}{c+7} + \frac{d+7}{d+9} = \frac{a+3-2}{a+3} + \frac{b+5-2}{b+5} + \frac{c+7-2}{c+7} + \frac{d+9-2}{d+9}$ 1p

$= 1 + 1 + 1 + 1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+5} + \frac{1}{c+7} + \frac{1}{d+9} \right)$ 1p

Din relația dată $\Rightarrow 17 \cdot \left(\frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+5} + \frac{1}{c+7} + \frac{1}{d+9} \right) = 18 \Rightarrow \frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+5} + \frac{1}{c+7} + \frac{1}{d+9} = \frac{18}{17}$ 1p

Obținem $\frac{a+1}{a+3} + \frac{b+3}{b+5} + \frac{c+5}{c+7} + \frac{d+7}{d+9} = 4 - 2 \cdot \frac{18}{17} = \frac{32}{17}$ 1p

SUBIECTUL 2

Se consideră numerele naturale $n, n+2, n+6$ și S suma lor.

a) Dacă $n, n+2, n+6$ sunt simultan numere prime, arătați că există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $S = 9k + 5$.

b) Dacă $n, n+2, n+6$ sunt simultan numere prime, determinați restul împărțirii lui S la 18.

SOLUȚIE

a) $n = 2 \Rightarrow n+2$ - număr compus; $n = 3 \Rightarrow n+6$ - număr compus; 1p

n - prim și $n \geq 5 \Rightarrow n = 6p + 1$ sau $n = 6p + 5$ 1p

I) $n = 6p + 1 \Rightarrow n+2 = 6p + 3$ - număr compus 1p

II) $n = 6p + 5 \Rightarrow S = 6p + 5 + 6p + 7 + 6p + 11 = 18p + 23$ 1p

$S = 9 \cdot \underbrace{(2p+2)}_k + 5 = 9k + 5 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ cu proprietatea cerută 1p

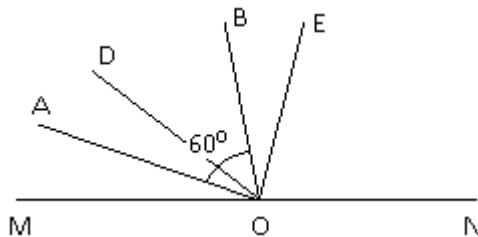
b) $S = 18p + 23 = 18 \cdot (p+1) + 5 = 18 \cdot q + 5 \Rightarrow$ restul este 5 2p

SUBIECTUL 3

Unghiurile $\angle MOA$ și $\angle AON$ sunt adiacente suplementare, $[OB \subset \text{Int}(\angle AON)]$ astfel încât $m(\angle AOB) = 60^\circ$, $[OD]$ și $[OE]$ sunt bisectoarele unghiurilor $\angle MOB$, respectiv $\angle AON$. Determinați măsura unghiului $\angle DOE$.

SOLUȚIE

Pentru figura alăturată,



$$m(\angle MOA) = x \Rightarrow m(\angle AON) = 180^\circ - x \dots\dots\dots 1p$$

$$m(\angle MOB) = 60^\circ + x,$$

$$[OD \text{ bisectoarea } \angle MOB \Rightarrow m(\angle MOD) = m(\angle DOB) = 30^\circ + \frac{x}{2} \dots\dots\dots 1p$$

$$[OE \text{ bisectoarea } \angle AON \Rightarrow m(\angle AOE) = m(\angle EON) = \frac{180^\circ - x}{2} = 90^\circ - \frac{x}{2} \dots\dots\dots 1p$$

$$m(\angle BOE) = m(\angle AOE) - m(\angle AOB) = 90^\circ - \frac{x}{2} - 60^\circ = 30^\circ - \frac{x}{2} \dots\dots\dots 2p$$

$$m(\angle DOE) = m(\angle DOB) + m(\angle BOE) = 30^\circ + \frac{x}{2} + 30^\circ - \frac{x}{2} = 60^\circ \dots\dots\dots 2p$$

SUBIECTUL 4

A, B, C, D sunt puncte coliniare, în această ordine, astfel încât $[AB] \equiv [CD]$.

a) Arătați că segmentele $[AD]$ și $[BC]$ au același mijloc.

b) Dacă punctele M și N sunt situate în semiplane diferite față de dreapta AB , $[AM] \equiv [DN]$, $[MB] \equiv [NC]$, iar O este mijlocul segmentului $[BC]$, demonstrați că punctele M, O și N sunt coliniare.

SOLUȚIE

$$a) O - \text{mijlocul lui } [BC] \Rightarrow [OB] \equiv [OC] \dots\dots\dots 1p$$

$$OB + AB = OC + CD \Rightarrow [OA] \equiv [OD] \Rightarrow O - \text{mijlocul lui } [AD] \dots\dots\dots 1p$$

$$b) \triangle MAB \equiv \triangle NDC \text{ (LLL)} \Rightarrow \angle MAO \equiv \angle NDO \dots\dots\dots 1p$$

$$\triangle MAO \equiv \triangle NDO \text{ (LUL)} \Rightarrow \angle MOA \equiv \angle NOD \dots\dots\dots 2p$$

$$A, O, D - \text{coliniare și } \angle MOA \equiv \angle NOD \Rightarrow M, O, N - \text{coliniare} \dots\dots\dots 2p$$

Notă: Orice soluție corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim.