



## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 17.02.2018

**Clasa a XII-a**

### Barem de corectare și notare

#### SUBIECTUL 1

Fie  $(G, \cdot)$  un grup multiplicativ și  $a$  un element din  $G$ . Se definește funcția  $f_a : G \rightarrow G$ ,  $f_a(x) = xa^{-1}$

a) Să se arate că  $f_a$  este o funcție bijectivă, pentru orice  $a \in G$ .

b) Să se arate că mulțimea  $M = \{f_a \mid a \in G\}$  împreună cu operația de compunere a funcțiilor formează un grup.

\* \* \*

a) injectivitatea .....1p surjectivitatea .....1p

b)  $(f_a \circ f_b)(x) = f_a(xb^{-1}) = (xb^{-1})a^{-1} = x(ab)^{-1} = f_{ab}(x) \Rightarrow$  legea este bine definită .....2p

asociativitatea – din asociativitatea compunerii funcțiilor .....1p

Fie  $e$  elementul neutru. Atunci  $f_a \circ f_e = f_{ae} = f_a$  și  $f_e \circ f_a = f_{ea} = f_a$ ,  $\forall f_a \in M \Rightarrow f_e$  este elementul neutru pe  $M$  .....1p

$f_a \circ f_{a^{-1}} = f_{aa^{-1}} = f_e$ ,  $f_{a^{-1}} \circ f_a = f_{a^{-1}a} = f_e \Rightarrow (f_a)^{-1} = f_{a^{-1}} \in M$ ,  $\forall f_a \in M$  adică orice element este simetrizabil .....1p

#### SUBIECTUL 2

Fie  $(G, \cdot)$  un grup finit și abelian cu  $e$  element neutru. Să se arate că numărul soluțiilor ecuației  $x^n = e$ , unde  $n \in \mathbf{N}^*$ , divide ordinul grupului.

*Zîrnă Cătălin*

Fie  $H = \{x \in G \mid x^n = e\}$ .

Evident  $e \in H$  .....1p

$\forall x_1, x_2 \in H \Rightarrow x_1^n = x_2^n = e$

$(x_1 x_2)^n = x_1^n x_2^n$  (din comutativitate).....1p

$\Rightarrow (x_1 x_2)^n = x_1^n x_2^n = e \cdot e = e \Rightarrow x_1 x_2 \in H$  .....1p

Se arată că  $H$  este subgrup al lui  $G$ .....2p

Cum ordinul oricărui subgrup divide ordinul grupului, rezultă concluzia .....2p

### SUBIECTUL 3

Fie  $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 2xe^{x^2}$ . Determinați o funcție  $g : (1, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$  cu proprietatea că există o primitivă  $G$  a lui  $g$  și o primitivă  $F$  a lui  $f$  astfel încât  $FG$  să fie o primitivă a funcției  $fg$ .

\* \* \*

Observăm că  $F(x) = e^{x^2}$  este o primitivă a funcției  $f$  .....1p

$$(FG)' = fg \Leftrightarrow fG + Fg = fg \Leftrightarrow 2xe^{x^2}G(x) + e^{x^2}g(x) = 2xe^{x^2}g(x) \Leftrightarrow 2xG(x) + g(x) = 2xg(x)$$

$$2xG(x) + G'(x) = 2xG'(x) \Leftrightarrow 2xG(x) = (2x-1)G'(x) \Leftrightarrow G'(x) - \frac{2x}{2x-1}G(x) = 0 \dots\dots\dots 2p$$

$$\int \frac{2x}{2x-1} dx = x + \frac{1}{2} \ln(2x-1) + C \dots\dots\dots 1p$$

Fie  $h : (1, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $h(x) = x + \frac{1}{2} \ln(2x-1)$ .

$$(G(x) \cdot e^{-h(x)})' = (G'(x) - h'(x)G(x))e^{-h(x)} = 0 \Rightarrow G(x) \cdot e^{-h(x)} = k \Rightarrow G(x) = ke^{h(x)} = ke^x \sqrt{2x-1} \dots\dots 2p$$

$$g(x) = G'(x) = \frac{2kx}{\sqrt{2x-1}} e^x, k \in \mathbf{R} \dots\dots\dots 1p$$

### SUBIECTUL 4

Fie  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  o funcție strict crescătoare și  $I_n = \int_0^1 (f(x))^n dx$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ .

a) Demonstrați că șirul  $(I_n)_{n \geq 1}$  este convergent.

b) Demonstrați că pentru orice  $a \in (0, 1)$  are loc inegalitatea:  $I_n \leq a \cdot (f(a))^n + 1 - a$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .

c) Demonstrați că  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ .

*Chichirim Nelu*

$$a) f(x) \in [0, 1] \Rightarrow (f(x))^n \geq (f(x))^{n+1} \Rightarrow \int_0^1 (f(x))^n dx \geq \int_0^1 (f(x))^{n+1} dx \Rightarrow I_n \geq I_{n+1} \dots\dots\dots 1p$$

$$f(x) \in [0, 1] \Rightarrow (f(x))^n \in [0, 1] \Rightarrow I_n \in [0, 1] \dots\dots\dots 1p$$

Deci șirul  $(I_n)_{n \geq 1}$  este monoton și mărginit, așadar convergent.....1p

$$b) \forall x \in [0, a] \Rightarrow 0 \leq f(0) \leq f(x) \leq f(a) < f(1) \leq 1 \Rightarrow (f(x))^n \leq (f(a))^n \dots\dots\dots 1p$$

$$I_n = \int_0^a (f(x))^n dx + \int_a^1 (f(x))^n dx \leq \int_0^a (f(a))^n dx + \int_a^1 1 dx = a(f(a))^n + 1 - a \dots\dots\dots 1p$$

c) Din a) avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = I \in \mathbf{R}$

$$0 \leq I_n \leq a(f(a))^n + 1 - a, \forall n \Rightarrow 0 \leq I \leq 1 - a, \forall a \in (0, 1) \dots\dots\dots 1p$$

$$0 \leq I \leq 1 - a, \forall a \in (0, 1) \xrightarrow{a \nearrow 1} 0 \leq I \leq 0 \Rightarrow I = 0 \dots\dots\dots 1p$$

**Notă :** Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim .