



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală – Constanța, 17.02.2018

Clasa a XI-a

Barem de corectare și notare

SUBIECTUL 1

Observăm că $\det A = \det B = 0$, altfel ar fi inversabile și $A = B$, fals **1p**

Notăm cu $a = \text{Tr}A, b = \text{Tr}B$, folosind relația lui Cayley avem că $A^2 = aA, B^2 = bB$ **2p**

mai departe $A^3 = a^2A, B^3 = b^2B$, de unde avem că $aA = bB, a^2A = b^2B \Rightarrow b^2B = abB \Rightarrow b(b-a)B = O_2$. **1p**

i) Dacă $B = O_2 \Rightarrow A^2 = B^2 = O_2 \Rightarrow A^n = B^n = O_2 (\forall) n \geq 2$

ii) Dacă $b = 0 \Rightarrow B^2 = O_2$, analog mai sus

iii) Dacă $a = b \Rightarrow A^2 = B^2 \Rightarrow aA = bB \Rightarrow a(A-B) = O_2, A \neq B$, deci $a = 0$ și analog i) **3p**

SUBIECTUL 2

a) Se verifică prin calcul direct **2p**

b) Observăm că $A(x) = A(y) \Rightarrow x = y$, obținem că $m + n + 4mn = -1, n = \frac{-1-m}{1+4m} \in \mathbf{Z}$,

$(m; n) \in \{(-1; 0); (0; -1)\}$ **3p**

c) Avem că $\det(X \cdot {}^tX) = (\det(X))^2 \geq 0$ pentru $\forall X \in M_3(\mathbf{R})$, dar $\det\left(A\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = -1$, contradicție, deci nu există matrice cu această proprietate. **2p**

SUBIECTUL 3

a) Se arată inductiv că șirul are toți termeni pozitivi **1p**

Din relația de recurență obținem că $x_{n+1} - x_n = \frac{2018}{x_n} > 0$, adică șirul este strict crescător **2p**

Dacă șirul ar fi mărginit superior, deci convergent, trecând la limită în relația de recurență obținem că $\frac{2018}{l} = 0, x_n \rightarrow l$, fals. Deci șirul este strict crescător și nemărginit superior, atunci $x_n \rightarrow \infty$ **1p**

b) Aplicăm criteriul Stolz-Cesaro avem că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{\sqrt{n}}\right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1}^2 - x_n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4036 + \frac{2018^2}{x_n^2}\right) = 4036$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{4036}$ **3p**

SUBIECTUL 4

Avem $\frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k+1}}{k(k+1)} = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k+1}\right) = a_k - a_{k+1} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, unde

$a_k = \frac{1}{k} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k}\right)$ **2p**

Însumând relațiile de mai sus obținem

$\sum_{k=1}^n \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k+1}}{k(k+1)} = a_1 - a_{n+1} + 1 - \frac{1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}\right)$ **2p**

Dar folosind criteriul Stolz-Cesaro $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}\right)}{n+1} = 0$.. **2p**

În final $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k+1}}{k(k+1)}\right) = 2$ **1p**

Notă : Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim.