



## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 17.02.2018

**Clasa a X-a**

### Barem de corectare și notare

#### SUBIECTUL 1

Condiția de existență impune  $\left(\frac{3x-2}{2x-3}\right) > 0$ , obținem că  $x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; \infty\right)$  ..... **1p**

Notăm cu  $a = 3x - 2$ ;  $b = 2x - 3$ , ecuația devine  $\log_2 \frac{a}{b} = \sqrt{b^2 + 1} - \sqrt{a^2 + 1}$ ,  $\frac{a}{b} > 0$  sau

$\log_2 \left|\frac{a}{b}\right| = \sqrt{|b|^2 + 1} - \sqrt{|a|^2 + 1}$  sau  $\log_2 |a| - \log_2 |b| = \sqrt{|b|^2 + 1} - \sqrt{|a|^2 + 1}$  ..... **2p**

Dacă  $|a| > |b|$ , membrii egalității sunt de semne diferite, analog pentru  $|a| < |b|$ , deci  $|a| = |b|$ ,  $a = \pm b$  ... **2p**

Dacă  $a = b \Rightarrow 3x - 2 = 2x - 3$ ,  $x = -1$ ,  $x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; \infty\right)$ ,

dacă  $a = -b \Rightarrow 3x - 2 = -2x + 3$ ,  $x = 1$ ,  $x \notin \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; \infty\right)$ , soluția este  $x = -1$  ..... **2p**

#### SUBIECTUL 2

Avem că  $x > 0$ ,  $3^{x^2+3x} + \log_3 x = 3^{x+3} + \log_3 (x+3)$ ,

adică  $3^{x^2+3x} + \log_3 (x^2 + 3x) = 3^{x+3} + \log_3 (x+3)$  ..... **2p**

Considerăm funcția  $f : (0; \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 3^x + \log_3 x$ , care este strict crescătoare, fiind sumă de funcții strict crescătoare, deci injectivă ..... **2p**

Avem că  $f(x^2 + 3x) = f(x+3)$  ..... **1p**

Din injectivitate obținem  $(x^2 + 3x) = (x+3)$ ,  $x = 1 > 0$  ..... **2p**

#### SUBIECTUL 3

Aplicăm inegalitatea mediilor

$\left(\sqrt{a+1} + \frac{\sqrt{2}}{b+1}\right) = \left(\frac{\sqrt{a+1}}{2} + \frac{\sqrt{a+1}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{b+1}\right) \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{(\sqrt{a+1})^2 \sqrt{2}}{4(b+1)}} = 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{(a+1)\sqrt{2}}{4(b+1)}}$  și analog celelalte ... **4p**

Înmulțind cele 3 relații se obține concluzia ..... **3p**

Obs. Egalitatea se obține pentru  $a = b = c = 1$ .

#### SUBIECTUL 4

Putem scrie  $E(z) = |z+1| + |z^2+1| = |z+1| + |z+i| \cdot |z-i|$  ..... **1p**

Dar  $|z+i| + |z-i| \geq |z+i-z+i| = 2$  ..... **1p**

deci  $|z+i| \geq 1$  sau  $|z-i| \geq 1$  ..... **1p**

Dacă  $|z-i| \geq 1$  avem că  $|z+i| \cdot |z-i| \geq |z+i|$ ,  $E(z) \geq |z+1| + |z+i| \geq |z+1-z-i| = \sqrt{2}$ ,  $E(z) \geq \sqrt{2}$ .

Dacă  $|z+i| \geq 1$  avem că  $|z+i| \cdot |z-i| \geq |z-i|$ ,  $E(z) \geq |z+1| + |z-i| \geq |z+1-z+i| = \sqrt{2}$ ,  $E(z) \geq \sqrt{2}$ .

Cum  $E(i) = \sqrt{2}$ , obținem că minimul cerut este  $\min_{z \in \mathbf{C}} \{E(z) | z \in \mathbf{C}\} = \sqrt{2}$  ..... **4p**

**Notă :** Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim.