



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Etapă locală – Constanța 17.02.2018

Clasa a X-a

Filiera teoretică: Profilul real – specializarea științele naturii

Barem de corectare și notare

SUBIECTUL 1

- a) $n(n+2) < (n+1)^2$ 1p
 $n^3 < n(n+1)(n+2) < (n+1)^3$ 1p
 $[A] = n$ 1p
b) $\exists y \in \mathbb{Z} \text{ a.î. } x^3 - 6x^2 + 12x - 1 = y^3$
 $y^3 - (x-2)^3 = 7$ 1p
 $(y-x+2)(y^2 + y(x-2) + (x-2)^2) = 7$
 $(y-x+2) \mid 7$ 1p
 $y-x \in \{-1, -3, 5, -9\}$
 $x=0, y=-1$
 $x=3, y=2$ 2p

SUBIECTUL 2

- a) $2^{abc} = (2^a)^{bc} = 35^{bc} = (5^b)^c \cdot (7^c)^b = 14^c \cdot 10^b$ 1p
 $= 2^{b+c} \cdot 10 \cdot 14 = 2^{b+c+2} \cdot 5 \cdot 7 = 2^{b+c+2} \cdot 2^a = 2^{a+b+c+2}$ 2p
b) $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\log_a b}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{\log_b a}}} \leq \sqrt{2}$ 1p
Notăm $\log_a b = t \in (0, \infty)$
 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t+2}} + \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t+2}} \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{t} + \sqrt{2} \leq \sqrt{2(t+2)}$ 1p
 $t+2+2\sqrt{2t} \leq 2(t+2) \Leftrightarrow (\sqrt{t}-\sqrt{2})^2 \geq 0$ 2p

SUBIECTUL 3

- $\begin{cases} \bar{z} - u \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} - u = z - \bar{u} \Rightarrow \bar{z} - z = u - \bar{u} \\ u^2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow u^2 = \bar{u}^2 \end{cases}$ 2p
- Dacă $u = \bar{u} \Rightarrow z = \bar{z} \Rightarrow z \in \mathbb{R}$ fals.
Rămâne $u = -\bar{u} \Rightarrow \bar{z} - z = 2u \Rightarrow \bar{z} - z = 2 \cdot \frac{1-z}{1+z}$ 2p
 $z \cdot \bar{z} = 1$ 1p
 $\bar{z} + z\bar{z} - z - z^2 = 2 - 2z \Rightarrow \bar{z} = z^2 + 1 - z \mid \cdot z$
 $1 = z^3 + z - z^2 \Rightarrow (z^2 + 1)(z - 1) = 0 \Rightarrow z = \pm i$ 2p

SUBIECTUL 4

- a) Notăm $2^x = a, 3^x = b, 4^x = c$
Ecuația devine $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$ 1p
 $(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 = 0$, de unde $a = b = c$, deci $x = 0$ 2p
b) Notăm $\log_3 x = t, x > 0 \Rightarrow x = 3^t, 1 + \sqrt{x} = 2^t$ 1p
 $1 + \sqrt{3}^t = 2^t$, de unde $\left(\frac{1}{2}\right)^t + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^t = 1$ 1p
Dacă $t < 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^t + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^t > 1$
Dacă $t > 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^t + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^t < 1$
Deci $t = 2$ soluție unică $\Rightarrow x = 9$ 2p
Notă : Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim.