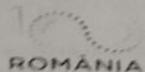


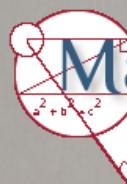


MINISTERUL EDUCAȚIEI  
NAȚIONALE



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA PE SECTOR, 25.02.2018



Mate.info.ro  
profu' de mate

CLASA a IX-a

**Notă:**Toate subiectele sunt obligatorii.Fiecare subiect se puncteză de la 0 la 7 puncte

Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete.Timp de lucru: 3 ore

1. Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $x[x]=\{x\}$ , unde  $[x]$  și  $\{x\}$  reprezintă partea întreaga, respectiv partea fracționară, a numărului real  $x$ .
2. Fie  $(a_n)_n$  o progresie aritmetică de rație  $r$ . Demonstrați că dacă  $([a_n])_n$  este tot o progresie aritmetică atunci  $r$  este un număr întreg, unde  $[a]$  reprezintă partea întreaga a numărului real  $a$ .
3. Arătați că, dacă  $a, b, c$  sunt lungimile laturilor unui triunghi atunci :
$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$$
4. Fie  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  trei vectori nenuli, oricare doi distinți, de module egale, iar  $\vec{h} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ . Arătați că există un triunghi ABC cu ortocentrul H și centrul cercului circumscris O astfel încât  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$  și  $\overrightarrow{OH} = \vec{h}$ .



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA PE SECTOR, 25.02.2018

CLASA a IX-a

SOLUȚII SI BAREME ORIENTATIVE

**Notă:** Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje intregi. Orice altă se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1, autor G.M. 10/2017, Supliment

Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $x[x] = \{x\}$ , unde  $[x]$  și  $\{x\}$  reprezintă partea întreagă, respectiv partea fractionară a numărului real  $x$ .

| Detalii rezolvare   | Barem asociat |
|---|---------------|
| $0 \leq x[x] < 1$   |               |
| Dacă $x \geq 1$ atunci $[x] \geq 1$ , deci $x[x] \geq 1$ , absurd           | 1p            |
| Dacă $x < -1$ atunci $[x] < -1$ , deci $x[x] > 1$ , absurd                  | 1p            |
| Dacă $x \in [0, 1)$ atunci $[x] = 0$ , deci $\{x\} = 0$ , $x = 0$ , soluție | 1p            |
| Dacă $x \in [-1, 0)$ , $[x] = -1$ , deci $-x = \{x\}$                       | 2p            |
| $x = -\frac{1}{2}$ , soluție  | 2p            |

Enunț subiect 2, autor Mircea Teaca

Fie  $(a_n)_{n \geq 1}$  o progresie de ratie  $r$ . Demonstrați că dacă sirul  $([a_n])_{n \geq 1}$  este tot o progresie aritmetică, atunci,  $r$  este un număr întreg, unde  $[a]$  reprezintă partea întreagă a numărului real  $a$ .

| Detalii rezolvare   | Barem Asociat |
|---|---------------|
| $(a_n)_{n \geq 1}$ și $([a_n])_{n \geq 1}$ , progresii aritmetice atunci sirul $(a_n - [a_n])_{n \geq 1}$ , este progresie aritmetică                   | 3p            |
| $a_n - [a_n] = \{a_n\}$ deci $0 \leq a_n - [a_n] < 1$ , $(\forall)_{n \geq 1}$ , sirul $(a_n - [a_n])_{n \geq 1}$ marginit; ratia acestui sir este nula | 2p            |
| Din $a_2 - [a_2] = a_1 - [a_1]$ avem $r = a_2 - a_1 = [a_2] - [a_1]$ , deci $r \in \mathbb{Z}$  | 2p            |



Enunt subiect 3 ,autor N.Cioranescu G.M./1937

Demonstrati ca daca a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi atunci:

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$$

Detalii Rezolvare

|   | Barem Asociat |
|---|---------------|
| Fie $E(a,b,c) = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$  |               |
| Notam $b+c=x$ , $c+a=y$ si $a+b=z$ deci   | 1p            |
| $a = \frac{y+z-x}{2}$ , $b = \frac{z+x-y}{2}$ , $c = \frac{x+y-z}{2}$   |               |
| $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ si analoagele  |               |
| $E(a,b,c) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \left( \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + \left( \frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) - 3 \right] \geq \frac{1}{2} (2 + 2 + 2 - 3) = \frac{3}{2}$ | 1p            |
| Pentru inegalitatea $E(a,b,c) < 2$ avem :   | 1p            |
| $b+c > a$ deci $(b+c)+(b+c) > a+b+c$  |               |
| $b+c > \frac{a+b+c}{2} = p$ , $\frac{a}{b+c} < \frac{a}{p}$ si analoagele   | 2p            |
| $E(a,b,c) < \frac{a+b+c}{p} = 2$  | 1p            |
|   | 1p            |

Enunț subiect 4, autor Marcel Tena

Fie  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  trei vectori nenuli, oricare doi distincti de module egale, iar  $\vec{h} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ . Arătați că există un triunghi ABC cu ortocentrul H și centrul cercului circumscris O astfel încât  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ ,  $\overrightarrow{OH} = \vec{h}$

| Detalii rezolvare   | Barem asociat |
|---|---------------|
| Fie $R =  \vec{a}  =  \vec{b}  =  \vec{c}  > 0$ . Fixăm un punct O în plan și construim cercul de centru O și rază R  | 1p            |
| Pe acest cerc există și sunt unic determinate punctele A,B,C astfel încât $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ , $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ , $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$                                       | 1p            |
| Punctele A,B,C sunt distincte ; sunt necoliniare deoarece o dreaptă nu poate tăia un cerc în trei puncte, deci sunt varfurile unui triunghi   | 3p            |
| Notăm cu H ortocentrul triunghiului ABC și conform relației lui Sylvester avem :<br>$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{h}$ | 2p            |