OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA PE SECTOR, 25.02.2018

CLASA a IX-a

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte

Pe foaia de concurs se trec rezolvăriile complete. Timp de lucru: 3 ore

1. Determinați numerele reale x pentru care $x[x]=\{x\}$, unde $[x]$ si $\{x\}$ reprezinta partea intreaga, respectiv partea fracționara, a numarului real x.

2. Fie $(a_n)_n$ o progresie aritmetica de rație r. Demonstrați că dacă $([a_n])_n$ este tot o progresie aritmetica atunci r este un numar întreg, unde $[a]$ reprezintă partea întreaga a numărului real a.

3. Arătati că, dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi atunci :

$$\frac{3}{2} \le \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$$

4. Fie $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ trei vectori nenuli, oricare doi distincți, de module egale, iar $\vec{h}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. Arătați că există un triunghi ABC cu ortocentrul H si centrul cercului circumscris O astfel încât $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}, \overrightarrow{OC}=\vec{c}$ si $\overrightarrow{OH}=\vec{h}$.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA PE SECTOR, 25.02.2018

CLASA a IX-a

SOLUȚII SI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acorda numai punctaje intregi. Orice altă se asimileaza conform baremului.

Enunț subiect 1, autor G.M .10/2017, Supliment

Determinați numerele reale x pentru care $x[x] = \{x\}$, unde $[x]$ si $\{x\}$ reprezinta partea intreaga, respectiv partea fractionara a numarului real x.

Detalii rezolvare	
$0 \le x[x] < 1$	Barem asociat
Daca $x \ge 1$ atunci $[x] \ge 1$, deci $x[x] \ge 1$, absurd	1p
Daca $x < -1$ atunci $[x] < -1$, deci $x[x] > 1$, absurd	1p
Daca $x \in [0,1)$ atunci $[x] = 0$, deci $\{x\} = 0$, $x = 0$, solutie	1p
Daca $x \in [-1,0)$, $[x] = -1$, deci $-x = \{x\}$	2p
$x = -\frac{1}{2}$, solutie	2p

Enunt subiect 2 ,autor Mircea Țeca

Fie $(a_n)_{n\ge1}$,o progresie de ratie **r**.Demonstrati ca daca sirul $([a_n])_{n\ge1}$,este tot o progresie aritmetica , atunci , **r** este un numar intreg , unde $[a]$ reprezinta partea intreaga a numarului real **a.**

Detalii rezolvare	Barem Asociat
$(a_n)_{n\ge1}$ si $([a_n])_{n\ge1}$, progresii aritmetice atunci sirul $(a_n-[a_n])_{n\ge1}$,este progresie aritmetica	3p
$a_n - [a_n] = \{a_n\}$ deci $0 \le a_n-[a_n] < 1$, $(\forall)_{n\ge1}$, sirul $(a_n-[a_n])_n$ marginit; ratia acestui sir este nula	2p
Din $a_2-[a_2]=a_1-[a_1]$ avem $r= a_2-a_1 = [a_2]-[a_1]$,deci $r\in \mathbb{Z}$	2p

Enunt subiect 3 ,autor N.Cioranescu G.M./1937

Demonstrati ca daca a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi atunci:

$$\frac{3}{2} \le \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$$

Detalii Rezolvare	Barem Asociat
Fie $E(a,b,c)=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$ Notam b+c=x , c+a=y si a+b=z deci $a=\frac{y+z-x}{2}$, $b=\frac{z+x-y}{2}$, $c=\frac{x+y-z}{2}$	1p
$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2$ si analoagele	1p
$E(a,b,c)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)-3\right]\ge\frac{1}{2}(2+2+2-3)=\frac{3}{2}$	1p
Pentru inegalitatea E(a,b,c)<2 avem : b+c>a deci (b+c)+(b+c)>a+b+c	2p
$b+c>\frac{a+b+c}{2}=p$, $\frac{a}{b+c}<\frac{a}{p}$ si analoagele	1p
$E(a,b,c)<\frac{a+b+c}{p}=2$	1p

Enunț subiect 4, autor Marcel Țena

Fie $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ trei vectori nenuli, oricare doi distincti de module egale, iar $\vec{h}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ .Arătați că există un triunghi ABC cu ortocentrul H și centrul cercului circumscris O astfel încât $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{OH}=\vec{h}$

Detalii rezolvare	Barem asociat
Fie $R=\lvert\vec{a}\rvert=\lvert\vec{b}\rvert=\lvert\vec{c}\rvert>0$. Fixăm un punct O în plan și construim cercul de centru O și rază R	1p
Pe acest cerc există și sunt unic determinate punctele A,B,C astfel încât $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$	1p
Punctele A,B,C sunt distincte ; sunt necoliniare deoarece o dreaptă nu poate tăia un cerc în trei puncte, deci sunt varfurile unui triunghi	3p
Notăm cu H ortocentrul triunghiului ABC și conform relației lui Sylvester avem : $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{h}$	2p