OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA PE SECTOR, 25.02.2018

CLASA a X-a

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru:3 ore.

1. Fie funcțiile $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ și $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}^*$ astfel încât $f(f(n))+g(f(n))=n+1$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

a) Să se arate că funcția f este bijectivă

b) Să se determine funcția g.

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația

$$\sqrt{40+8x-6x^2}-\sqrt{20-16x+3x^2}=6x+4$$

3. Să se arate că $\sum_{k=1}^{2^n}[\log_2 k]\geq n^2$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ ($[a]$ este partea întreagă a numărului a).

4. a) Fie $a\in\mathbb{C}$ astfel încât $|a|<2$. Să se arate că există două numere complexe diferite, z_1 și z_2, pentru care $|z_1|=|z_2|=1$ și $z_1+z_2=a$.

b) Fie mulțimea $D=\{z\in C\,\|z|=1\}$ și funcția $f:D\to\mathbb{C}$, definită prin $f(z)=-z^2+az+b$, unde $a,b\in\mathbb{C}$. Să se demonstreze că funcția f este injectivă dacă și numai dacă $|a|\geq 2$.

(Gazeta matematică nr.2, 2017)

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA PE SECTOR, 25.02.2018
CLASA a X-a
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1,autor ...***.....

Fie functiile f:N→N si g:N→ N^*astfel incât f(f(n))+g(f(n))=n+1,(∀)n∈N.

a) Sa se arate ca functia f este bijectivă

b) Sa se determine functia g.

....

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a)Din f(n)=f(m) rezulta n+1=m+1,deci n=m ,adică functia f este injectivă(1)	2 p
g(n)≥1,implică f(f(n))≤n (2)	1p
Din (1)si(2),prin inductie,rezultă f(f(n))=n,(∀)n∈N (3)	2p
Din (3)rezultă f bijectivă	1p
b)Din g(f(n))=1 si f bijectivă, rezultă g(n)=1,(∀)n∈N.	1p

Enunț subiect 2, autor..Eugen Radu....................

2. Sa se rezolve in R ecuatia:

$$\sqrt{40+8x-6x^2}-\sqrt{20-16x+3x^2}=6x+4.$$

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Din conditiile de existentă rezultă x$\epsilon[-2,2]\cup\left\{\frac{10}{3}\right\}$.	2p
Ecuatia se scrie echivalent:$\sqrt{10-3x}\,\frac{3x+2}{\sqrt{2x+4}+\sqrt{2-x}}$=2(3x+2)	2p
Reținem solutia $-\frac{2}{3}$;observăm ca $\frac{10}{3}$ nu este solutie.	1p
Ecuatia 2($\sqrt{2x+4}$+$\sqrt{2-x}$)=$\sqrt{10-3x}$ are unica solutie x=−2	2p
La final:solutiile sunt −2 si $-\frac{2}{3}$	

Enunț subiect 3, autor......***................

Sa se arate că: $\sum_{k=1}^{2^n}[\log_2 k]\geq n^2$,(∀)n∈ N^*($[a]$ este partea intreagă a numarului a).

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Avem $[\log_2 k]$=p ↔ $2^p\leq k<2^{p+1}$ ↔k∈ $\{2^p,2^p+1,2^p+2,\dots 2^{p+1}-1\}$	2p

Suma S, din enunț este egală cu $n+\sum_{p=0}^{n-1} p\cdot 2^p=(n-2)\cdot 2^n+n+2$.	3p
Prin inductie : $2^n \geq n+1 (\forall) n\in N$.	1p
Deducem ca $S\geq n^2, (\forall) n\in N^*$.	1p

Enunț subiect 4, autor......***.................

a) Fie $a\in C$ astfel incât $|a|<2$. Sa se arate ca există doua numere complexe ,diferite, z_1 și z_2, pentru care $|z_1|=|z_2|=1$ și $z_1+z_2=a$.

b) Fie multimea $D=\{z\in C \mid |z|=1\}$ si functia $f: D\to C$, definită prin $f(z)=-z^2+az+b$, unde $a,b\in C$. Sa se demonstreze că functia f este injectivă dacă si numai dacă $|a|\geq 2$. (G.M. nr.2, 2017)

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Dacă a=0, evident. Altfel, din $z_1-z_2=\frac{a}{2}\cdot i\cdot t$ si $z_1+z_2=a$, $t\in R^*$, avem $z_1=\frac{a}{2}+\frac{a}{4}it$, $z_2=\frac{a}{2}-\frac{a}{4}it$ (z_1 si z_2 diferite).	2p
Pentru $t=\frac{2}{\lvert a\rvert}\cdot\sqrt{4-\lvert a\rvert^2}$ avem $\lvert z_1\rvert=\lvert z_2\rvert=1$	1p
b) $f(z_1)=f(z_2)\leftrightarrow(z_2-z_1)(z_2+z_1-a)=0$. Din a) rezultă că dacă f este injectivă atunci $\lvert a\rvert\geq 2$.	2p
Reciproc, dacă $\lvert a\rvert\geq 2$, $\lvert z_1\rvert=\lvert z_2\rvert=1$ si $z_1+z_2=a$, atunci $\lvert z_1+z_2\rvert=\lvert z_1\rvert+\lvert z_2\rvert$ (1)	1p
Din (1) deducem că z_1 si z_2 sunt egale.	1p