OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA PE SECTOR, 25.02.2018

CLASA a XI-a

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

1. Arătați că, dacă $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$, sunt numere reale și

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 & b_4 \end{pmatrix},$$

atunci $\text{rang}(A)+\text{rang}(B)=\text{rang}(C)$.

2. a) Arătați că, dacă a,b,c,d sunt numere reale, $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și $tr(X)=a+d$, atunci $X^2-tr(X)X+\det(X)I_2=O_2$.

b) Arătați că dacă $A,B\in M_2(\mathbb{R})$, $(A+B)(AB+BA)=(AB+BA)(A+B)$ și $tr(A)\neq tr(B)$, atunci $AB=BA$.

c) Arătați că dacă $A,B\in M_2(\mathbb{R})$, $(A^2+B^2)(AB+BA)=(AB+BA)(A^2+B^2)$ și $tr^2(A)\neq tr^2(B)$, atunci $AB=BA$.

3. Vom spune că o funcție $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ *crește foarte lent* dacă este strict crescătoare, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(2x)-f(x)\right)=0$.

a) Dați exemplu de funcție care crește foarte lent.

b) Arătați că dacă f este o funcție care crește foarte lent, atunci $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(nx)-f(x)\right)=0$, pentru orice număr natural $n\geq 2$.

4. a) Arătați că, dacă $a>0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(1+a)(2+a)(3+a)\dots(n+a)}=0$.

b) Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere strict pozitive astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=1$. Arătați că $a_n\to 0$.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA PE SECTOR, 25.02.2018
CLASA a XI-a
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1, autor ***

Arătați că, dacă $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$, sunt numere reale și

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 & b_4 \end{pmatrix},$$

atunci $\text{rang}(A)+\text{rang}(B)=\text{rang}(C)$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
$\det(C)=(a_1a_4-a_2a_3)(b_1b_4-b_2b_3)=\det(A)\det(B)$	**2p**
Dacă A și B au rangul 2, atunci C are rangul 4 și egalitatea se verifică	**1p**
Dacă $\text{rang}(A)=2$ și $\text{rang}(B)=1$, atunci, de exemplu, $b_1\neq 0$, $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \end{vmatrix}\neq 0$, iar $\det(C)=0$, deci $\text{rang}(C)=3$; analog dacă $\text{rang}(A)=1$, $\text{rang}(B)=2$	**1p**
Dacă A și B au rangul 1, atunci, de exemplu, $a_1\neq 0, b_1\neq 0$, deci $\begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{vmatrix}\neq 0$, iar cei 4 bordați de ordin 3 ai acestui determinant sunt nuli și, deci, $\text{rang}(C)=2$	**2p**
Dacă $\text{rang}(A)=0$, atunci $a_1=a_2=a_3=a_4=0$ și, evident, $\text{rang}(C)=\text{rang}(B)$; analog dacă $\text{rang}(B)=0$	**1p**

Enunț subiect 2, autor *Nicolae Bourbăcuț* (SGM 12/2017)

a) Arătați că, dacă a,b,c,d sunt numere reale, $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și $tr(X)=a+d$, atunci $X^2-tr(X)X+\det(X)I_2=O_2$.

b) Arătați că dacă $A,B\in M_2(\mathbb{R})$, $(A+B)(AB+BA)=(AB+BA)(A+B)$ și $tr(A)\neq tr(B)$, atunci $AB=BA$.

c) Arătați că dacă $A,B\in M_2(\mathbb{R})$, $(A^2+B^2)(AB+BA)=(AB+BA)(A^2+B^2)$ și $tr^2(A)\neq tr^2(B)$, atunci $AB=BA$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Verificăm prin calcul direct	**2p**

b) Ipoteza duce la $A^2B+B^2A=BA^2+AB^2$	1p
Din a) $A^2=aA+\alpha I_2$, $B^2=bB+\beta I_2$ şi rezultă $(a-b)(AB-AB)=O_2$, de unde cerinţa	2p
c) Avem $(aA+bB+(\alpha+\beta)I_2)(AB+BA)=(AB+BA)(aA+bB+(\alpha+\beta)I_2)$ şi apoi, procedând ca la b), $(a^2-b^2)(AB-BA)=O_2$, de unde concluzia	2p

Enunţ subiect 3, autor ***

Vom spune că o funcţie $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ *creşte foarte lent* dacă este strict crescătoare, $\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty$ şi $\lim_{x\to\infty}(f(2x)-f(x))=0$.

a) Daţi exemplu de funcţie care creşte foarte lent.

b) Arătaţi că dacă f este o funcţie care creşte foarte lent, atunci $\lim_{x\to\infty}(f(nx)-f(x))=0$, pentru orice număr natural $n\geq 2$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Pentru $f(x)=\ln(\ln x)$ avem $\ln(\ln 2x)-\ln(\ln x)=\ln\left(1+\frac{\ln 2}{\ln x}\right)\underset{x\to\infty}{\to}\ln 1$	2p
b) Există $p\in\mathbb{N}$ astfel încât $2^p>n$	1p
Avem $0<f(nx)-f(x)<f(2^p x)-f(x)=\left(f(2^p x)-f(2^{p-1}x)\right)+\ldots+\left(f(2x)-f(x)\right)$	2p
Deoarece limita fiecăreia dintre cele p paranteze este 0, limita la $+\infty$ a membrului drept este 0 şi, din teorema cleştelui, rezultă că limita cerută este 0	2p

Enunţ subiect 4, autor *George Stoica*

a) Arătaţi că, dacă $a>0$, atunci $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(1+a)(2+a)(3+a)\ldots(n+a)}=0$.

b) Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere strict pozitive astfel încât $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=1$. Arătaţi că $a_n\to 0$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $0<\frac{n!}{(1+a)(2+a)(3+a)\ldots(n+a)}=\frac{1}{\left(1+\frac{a}{1}\right)\left(1+\frac{a}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{a}{n}\right)}<\frac{1}{1+\frac{a}{1}+\frac{a}{2}+\ldots+\frac{a}{n}}$	2p
Deoarece $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=\infty$, concluzia reiese din teorema cleştelui	1p
b) Există n_0 astfel încât $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>\frac{1}{2}$ pentru $n\geq n_0$, sau $\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{n}{n+1/2}$	2p
Prin înmulţire obţinem $a_{n+1}<\frac{n_0(n_0+1)\ldots n}{(n_0+1/2)(n_0+3/2)\ldots(n+1/2)}a_{n_0}\to 0$, conform a)	2p