Ministerul Educației Naționale
SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA
INSPECTORATUL ȘCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREȘTI
ROMÂNIA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA PE SECTOR, 25.02.2018

CLASA a XII-a

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

1. a) (4p) Calculați $\int_1^2 \frac{1}{x(1+x^4)}\,dx$

b) (3p) Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, considerăm $f_n(x) = \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}$, $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right]$ și $f_n(0) = 0$. Fie $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,dt$. Demonstrați că șirul $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este constant.

2. a) (4p) Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că în orice grup $(G,\cdot)$ următoarele afirmații sunt echivalente.

i) $(xy)^n = (yx)^n$ pentru orice $x, y \in G$.

ii) $x^n y = y x^n$ pentru orice $x, y \in G$.

b) (3p) În monoidul comutativ $(\mathbb{Z}_{54},\cdot)$, grupul elementelor inversabile $U(\mathbb{Z}_{54})$ este ciclic?

3. a) (5p) Fie $(G,\cdot)$ un grup. Presupunem că există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall x \in G$ avem $x^{2n+1} = e$. Considerăm aplicația $f: G \to G$ definită prin $f(x) = x^2$. Demonstrați că funcția f este bijectivă.

b) (2p) Fie G un grup finit. Notăm $E = \{x \in G \mid x = x^{-1}\}$. Dacă G are un număr par de elemente, demonstrați că E are un număr par de elemente.

4. Fie $I(m;n) = \int_0^{\pi} x^m \cos^n x\,dx$, unde $m, n \in \mathbb{N}^*$.

a) (5p) Calculați $I(2;5)$.

b) (2p) Demonstrati că $I(2017;\ 2019) < 0$

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA PE SECTOR, 25.02.2018
CLASA a XII-a
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1, autori: Dan Dragoș Popa (GM), Vlad Drinceanu

a) (4p) Calculați $\int_1^2 \frac{1}{x(2+x^6)}dx$

b) (3p) Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ **, considerăm** $f_n(x) = \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ **și** $f_n(0) = 0$. **Fie** $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,dt$. **Demonstrați că șirul** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **este constant.**

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Efectuarea schimbării de variabilă $t = x^6$	2p
Transformarea integralei sub forma $\frac{1}{6}\int_1^{64} \frac{dt}{t(t+2)} = \frac{1}{6}\int_1^{64} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2}\right)dt$	1p
Calculul valorii integralei	1p
b) Considerarea diferenței $u_n - u_{n-1}$	1p
Folosirea formulei $\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x = 2\sin x \cos 2nx$	1p
Demonstrația egalității $u_n - u_{n-1} = 0$	1p

Enunț subiect 2, autor (a)Mihai Dicu (GM)

a) (4p) Fie $n \in \mathbb{N}^*$. **Arătați că în orice grup** $(G,\cdot)$ **următoarele afirmații sunt echivalente .**

i) $(xy)^n = (yx)^n$ **pentru orice** $x, y \in G$.

ii) $x^n y = y x^n$ **pentru orice** $x, y \in G$.

b) (3p) În monoidul comutativ $(\mathbb{Z}_{54},\cdot)$, **grupul elementelor inversabile** $U(\mathbb{Z}_{54})$ **este ciclic?**

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) i)⇒ ii) $(xy)^n x = x(yx)^n = x(xy)^n$	1p
Înlocuim y cu $x^{-1}y$, obținem $y^n x = xy^n$	1p
ii)⇒ i) $(xy)^n x = x(xy)^n$	1p
Egalitatea precedentă se poate scrie sub forma $x(yx)^n = x(xy)^n$, rezultă $(yx)^n = (xy)^n$	1p
b) $U(\mathbb{Z}_{54}) = \{\hat{k} \mid (k;54) = 1\}$, $\lvert U(\mathbb{Z}_{54})\rvert = 18$	1p
$ord(\hat{5}) \mid 18$, atunci $ord(\hat{5}) \in \{1,2,3,6,9,18\}$	1p
$ord(\hat{5}) = 18$, rezultă $U(\mathbb{Z}_{54})$ grup ciclic	1p

Enunţ subiect 3, autor Costel Chiteş

a) (5p) Fie $(G,\cdot)$ un grup. Presupunem că există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall x \in G$ avem $x^{2n+1} = e$. Considerăm aplicaţia $f: G \to G$ definită prin $f(x) = x^2$. Demonstraţi că funcţia f este bijectivă.

b) (2p) Fie G un grup finit. Notăm $E = \{x \in G | x = x^{-1}\}$. Dacă G are un număr par de elemente , demonstraţi că E are un număr par de elemente.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Fie $y \in G, f(x) = y \Leftrightarrow x^2 = y \Rightarrow x^{2n} = y^n \Rightarrow x^{-1} = y^n \Rightarrow x = y^{-n} = y^{n+1}$. Rezultă că f este funcţie surjectivă,	2p
Fie $x_1, x_2 \in G, f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1^{2n} = x_2^{2n} \Rightarrow x_1^{-1} = x_2^{-1} \Rightarrow x_1 = x_2$ Rezultă că f este funcţie injectivă .	3p
b) Fie $a \notin E$, rezultă $a \neq a^{-1}$. Deducem că mulţimea E are în complementara sa un număr par de elemente.(eventual vidă)	1p
Deoarece grupul G are un număr par de elemente, rezultă că E are cardinalul un număr par.	1p

Enunţ subiect 4, autori Ana-Maria Petriceanu, Daniel Petriceanu

Fie $I(m;n) = \int_0^{\pi} x^m \cos^n x\, dx$, unde $m, n \in \mathbb{N}^*$.

a) (5p) Calculaţi $I(2;5)$.

b) (2p) Demonstrati că $I(2017;\ 2019) < 0$

a) Avem $\cos^5 x = \frac{1}{16}(\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x)$	2p
$I(2;5) = \frac{1}{16}\left(-\frac{2}{5}\int_0^{\pi} x \sin 5x\, dx - \frac{10}{3}\int_0^{\pi} x \sin 3x\, dx - 20\int_0^{\pi} x \sin x\, dx\right)$	1p
$\frac{1}{16}\left(\frac{2}{25} x\cos 5x\Big\vert_0^{\pi} - \frac{2}{25}\int_0^{\pi} \cos 5x\, dx + \frac{10}{9}\left(x\cos 3x\Big\vert_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos 3x\, dx\right) + 20\left(x\cos x\Big\vert_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos x\, dx\right)\right)$	1p
$I(2;5) = -\frac{298\pi}{225}$	1p
b) $I(2017;2019) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{2017} \cos^{2019} x\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^{2017} \cos^{2019} x\, dx =$	
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{2017} \cos^{2019} x\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - t)^{2017} \cos^{2019}(\pi - t)\, dt =$	1p
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x^{2017} - (\pi - x)^{2017}\right) \cos^{2019} x\, dx < 0$	1p