OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA PE SECTOR, 25.02.2018
CLASA a V-a
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunţ subiect 1, autor I. Fota, GM nr 11 / 2017

Fie numărul $\overline{abcd}$. Să se arate că, dacă $11\cdot\overline{ab}=\overline{cd}+222$, atunci numărul $\overline{abcd}$ se divide cu 37.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
$\overline{abcd}=100\overline{ab}+\overline{cd}$;	1p
$\overline{cd}=11\overline{ab}-222 \Rightarrow \overline{abcd}=100\overline{ab}+11\overline{ab}-222$	2p
$\Rightarrow \overline{abcd}=111\overline{ab}-222 \Rightarrow \overline{abcd}=111(\overline{ab}-2)$	2p
$37 \mid 111 \Rightarrow 37 \mid \overline{abcd}$	2p

Enunţ subiect 2, autor ****

Determinați ultimile patru cifre ale numărului a= $2^{2018}-2^{2012}-2^{2011}$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
$2^{2018}-2^{2012}-2^{2011}=2^{2011}(2^7-2-1)=2^{2011}\cdot 125$	2p
$2^{2011}=2^{2008}\cdot 2^3$	1p
$2^{2011}\cdot 125=2^{2008}\cdot 2^3\cdot 5^3=2^{2008}\cdot 10^3$	2p
$U(2^{2008})=6 \Rightarrow$ ultimile patru cifre sunt 6,0,0,0	2p

Enunţ subiect 3, autor Teodor Cristian Olteanu

Se consideră şirul de numere naturale 3; 8; 13; 18; .....; 2018

a) Să se arate că suma primilor 72 de termeni din şir este pătrat perfect.

b) Să se arate că oricum am extrage 109 de numere din şir, suma acestora nu este pătrat perfect

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a)$3=5\cdot 0+3$; $8=5\cdot 1+3$; $13=5\cdot 2+3$;........;$358=5\cdot 71+3$ cei 72 de termeni	1p
Suma:$5(1+2+3+......+71)+3\cdot 72=5\cdot 71\cdot 36+3\cdot 72=36(355+6)=36\cdot 361$	1p
$36\cdot 341=6^2\cdot 19^2=(6\cdot 19)^2$ pătrat perfect	1p
b) Cele 109 numere pot fi: $5a_1+3$; $5a_2+3$; $5a_3+3$......;$5a_{109}+3$ Suma lor: $5(a_1+a_2+a_3+......a_{109})+3\cdot 109$	1p
Ultima cifră a numărului $5(a_1+a_2+a_3+......+a_{109})$ este 0 sau 5 iar ultima cifră a numărului $3\cdot 109$ este 7	2p
Ultima cifră a numărului $5(a_1+a_2+a_3+......a_{109})+3\cdot 109$ este 7 sau 2$\Rightarrow$ suma nu poate fi patrat perfect	1p

Enunţ subiect 4, autor Liliana Maria TODERIUC; Gabriel VRÎNCEANU

Notăm în cele ce urmează cu A un număr oarecare natural şi cu S(A) suma cifrelor *numărului natural* A (ex: S(132)=1+3+2=6)

Dacă numărul A are proprietatea că S(A)= 2018 determinaţi numărul de valori numere naturale care pot fi rezultate ale diferenţelor S(A) – S(A+1) sau S(A+1) – S(A) ,

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Numărul de cazuri este determinat de numărul de cifre consecutive de 9 cu care se finalizează numărul A,	2p
la care se adaugă cazul $S(A+1)-S(A)=1$, corespunzător cifrei unităţilor diferită de 9	2p
Cum $2018=224\cdot 9+2$, rezultă că numărul maxim de cifre de 9 din care poate fi format A este 224,	2p
în total numărul valorilor diferenţelor este 225	1p
Observaţie: diferenţele posibile sunt de forma 1 sau $9\cdot k-1$, unde k este orice număr natural care îndeplineşte condiţia $1\le k\le 224$.	