Ministerul Educației Naționale · Societatea de Științe Matematice din România · Inspectoratul Școlar al Municipiului București · 100 România

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA PE SECTOR, 25.02.2018
CLASA a VI-a
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1, autor.(***)

Se consideră M, A și B trei puncte coliniare în această ordine și punctele C și D aparținând semidreptei [MA astfel încât $MC = 3 \cdot MA$ și $MD = 3 \cdot MB$. Știind că BC = MA, să se calculeze valoarea raportului $\frac{BD}{AB}$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Notăm MA = x ⇒ MC = 3x și BC = x	1p.
(I) Ordinea punctelor: M, A, B, C, D. ⇒ AC= MC – MA, AC = 2x	1p.
AB = AC – BC ⇒ AB = 2x – x = x , MB = MA + AB = 2x, MD = 6x, CD =3x, BD = 4x	1p.
$\frac{BD}{AB}=\frac{4x}{x}= 4$	1p.
(II) Ordinea punctelor: M, A, C, B, D. ⇒ MB = MC + BC = 3x + x=4x ; MD = 12x	1p.
BD =MD – MB=12x – 4x = 8x, AB =MB – MA = 3x	1p.
$\frac{BD}{AB}=\frac{8x}{3x}=\frac{8}{3}$	1p.

Enunț subiect 2, autor.Cecilia Deaconescu și Radu Deaconescu, Pitești. G.M. Nr.6-7-8/2017.

Se consideră numerele raționale pozitive $x=\frac{3^{48}+8}{2^{77}+9}$ **și** $y=\frac{5^{74}+11}{11^{49}+5}$.

Arătați că: a) $y > \frac{11}{5}$.

b) $y - x > 1,3(1)$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $y >\frac{11}{5} \Leftrightarrow \frac{5^{74}+11}{11^{49}+5} > \frac{11}{5} \Leftrightarrow 5^{75} + 55 > 11^{50} + 55$	1p.
$5^{75} > 11^{50} \Leftrightarrow (5^3)^{25} > (11^2)^{25} \Leftrightarrow 125^{25} > 121^{25}$	1p.
b) Vom arăta că $x <\frac{8}{9} \Leftrightarrow \frac{3^{48}+8}{2^{77}+9} < \frac{8}{9} \Leftrightarrow$	1p.
$3^{50} + 72 < 2^{80} + 72 \Leftrightarrow 3^{50} < 2^{80} \Leftrightarrow 243^{10} < 256^{10}$ adevărat.	1p.
$y >\frac{11}{5}, x <\frac{8}{9} \Rightarrow y - x > \frac{11}{5} - \frac{8}{9} \Rightarrow$	1p.
$y - x > \frac{99-40}{45} = \frac{59}{45}$	1p.

$\frac{59}{45} = 1,3(1) \Rightarrow y - x > 1,3(1)$	1p.

Enunţ subiect 3.***

Aflaţi câte numere naturale *n* de 3 cifre au proprietatea că (*n*, 91) este un număr prim, unde (*n*, 91) este cel mai mare divizor comun al numerelor *n* şi 91.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
$91=7\cdot 13$; 7,13 = nr.prime. (n,91) = nr.prim | 91 $\Rightarrow$ $(n,91) \in \{7,13\}$	1p.
(I) $(n,91)=7 \Rightarrow$ n este multiplu de 7 şi nu este multiplu de 91.	1p.
Avem 128 de multipli ai lui 7 de trei cifre.	1p.
Avem 9 multipli ai lui 91 de trei cifre şi deci $128 - 9 = 119$ nr. de trei cifre cu $(n,91) = 7$.	1p.
(II) $(n,91)=13 \Rightarrow$ n este multiplu de 13 şi nu este multiplu de 91.	1p.
Avem 69 de multipli de 13 de trei cifre şi deci $69 - 9 = 60$ nr. de trei cifre cu $(n,91) = 13$.	1p.
În total avem $119 + 60 = 179$ numere.	1p.

Enunţ subiect 4, autor.Traian Preda, Bucureşti.

Determinaţi cel mai mic număr natural de patru cifre distincte care are proprietatea că suma dintre el şi răsturnatul său este un număr natural divizibil cu 230.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
$n=1001(a+d) + 110(b+c)$	1p.
$230\| n \Rightarrow 10\| n \Rightarrow 10\|1001(a+d) \Rightarrow 10\| (a+d) \Rightarrow a+d = 10$	1p.
$230\| 10010+110(b+c) \Rightarrow 23\| 1001+11(b+c) \Rightarrow$	1p.
$23\| 11(91+b+c)$; $(23,11)=1 \Rightarrow 23\| (91+b+c) \Rightarrow$	1p.
$23\| (91+b+c)$; $23\|92 \Rightarrow 23\| (b+c-1) \Rightarrow$	1p.
$b+c=1 \Rightarrow \{b,c\}=\{0,1\}$	1p.
Cifrele sunt distincte $\Rightarrow$ a este diferit de $1 \Rightarrow$ cel mai mic n=2018.	1p