OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA PE SECTOR, 25.02.2018
CLASA a VII-a
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1, autor Dana Radu.

Fie $a = 2018^{2018}, b = 2016^{2018}, c = 2018^{2016}, d = 2016^{2016}$. Justificați dacă numerele următoare sunt raționale sau iraționale :

a) $x = \sqrt{a+b+c+d}$

b) $y = \sqrt{a+c}$

c) $z = \sqrt{a+b+c}$

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Ultima cifra a sumei $a+b+c+d$ este $U(4+6+6+6)=2$	1
Finalizare	1
b) $2018^{2018} + 2018^{2016} = 2018^{2016}(1+2018^2)$; $2018^2 < 1 + 2018^2 < 2019^2$	1
Finalizare	1
c) $b = M_7$; $c = M_7+1$	1
$a = M_7 + 2^{2018} = M_7 + 8^{672} \cdot 4 = M_7+4$; $a+b+c = M_7+5$	1
Restul împărțirii unui pătrat perfect la 7 este 0, 1, 2 sau 4; Finalizare	1

Enunț subiect 2, autor ***

Fie a , b , c numere raționale.

a) Arătați că dacă $a \cdot b$ și $a + b$ sunt numere întregi, atunci a și b sunt numere întregi.

b) Arătați că dacă $a \cdot b$, $b \cdot c$, $a \cdot c$, $a + b + c$ sunt simultan numere întregi, atunci a , b și c sunt numere întregi.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a)Fie $a = \frac{x}{y}$, $(x, y) = 1$ unde $x, y \in Z$ și $a \cdot b = k, k \in Z$ $a + b = \frac{x}{y} + \frac{ky}{x} = \frac{x^2+ky^2}{xy} = t, t \in \mathbf{Z} \Rightarrow x^2 + ky^2 = txy \Rightarrow y \mid x^2$	2
Din $y \mid x^2$ și $(x, y) = 1 \Rightarrow y \mid x$. Finalizare	1
b)Din $a \cdot b$ și $a \cdot c \in \mathbf{Z} \Rightarrow a \cdot (b + c) \in \mathbf{Z}$	2
Din $a \cdot (b + c)$ și $a + (b+c)$, aplicând subpunctul **a)** rezultă că $a \in \mathbf{Z}$ și $(b+c) \in \mathbf{Z}$	1
Din $b \cdot c$ și $(b + c) \in \mathbf{Z}$, aplicând subpunctul **a)** rezultă că $b, c \in \mathbf{Z}$	1

Enunț subiect 3, autor Dana Radu

Fie $ABCD$ un paralelogram de centru O și $M \in (AC)$, astfel încât AM este o treime din MC. Paralela prin M la BD, intersectează pe BC în E și pe CD în F. Să se arate că dacă $FC = 3EO$, atunci triunghiul ADB este dreptunghic.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
O centrul paralelogramului $ABCD \Rightarrow O$ mijlocul lui (BD) și cum AM este o treime din MC rezultă că M este mijlocul lui (AO) (1)	1
Fie E_1 și F_1 intersecțiile dreptelor AB și AD cu FE. Din (1) și ME_1// OB⇒ E_1mijlocul lui AB și $2ME_1 = OB(2)$	1
Analog F_1mijlocul lui AD și $2MF_1 = OD$ (3); Din (2), (3) și OB=OD⇒ $ME_1 = = MF_1(3)$	1
Din paralelogramele FE_1BDși $DBEF_1 \Rightarrow BE_1 = DF$ și $DF_1 = BE \Rightarrow \Delta BEE_1 \equiv \Delta DFF_1$ $(L.U.L) \Rightarrow FF_1 = EE_1$ (4).Din (3) și (4) ⇒ M mijlocul lui (FE).(4)	1
Din(4) și CM=3MO ⇒O este centrul de greutate al triunghiului FEC(5)	1
Fie R mijlocul lui (FC) și (5) ⇒ $EO = \frac{2}{3}ER$ și cum $FC = 3EO \Rightarrow$ m(∢E)=90^0	1
În paralelogramul $DBEF_1$ m(∢E)=90^0 ⇒ m(∢ADB)=90^0	1

Enunț subiect 4, autor. Gazeta 9/2017

În triunghiul ABC cu $AB = AC$ și $(\sphericalangle A) = 40^0$, considerăm punctul $D \in (AC)$, astfel încât $m(\sphericalangle ABD) = 60^0$. Bisectoarea unghiului A intersectează dreapta BD în punctul E, iar punctul T, aparține bisectoarei unghiului A, astfel încât $E \in (AT)$și $ET = AB$. Arătați că patrulaterul $ABTC$ este romb.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Fie $F \in (ET)$, astfel încât m(∢FBC)=10^0	1
În ΔABCisoscel m(∢BAC)=40^0, m(∢ABC)=70^0, AE bisectoarea lui $A \Rightarrow AE \perp BC$	1
În ΔABF, m(∢BAF)=20^0, m(∢ABF)=70^0+10^0=80^0 ⇒ ΔABF isoscel, cu AB=AF(1)	1
În ΔEBF, m(∢EBF)= m(∢EBC)= m(∢CBF)= 10^0+10^0=20^0 și $FE \perp BC$ ⇒BE=BF și m(∢BEF)= 80^0	1
Din AB=ET, BF=BE și m(∢ABF)= m(∢BET)=80^0 ⇒ $\Delta ABF \equiv \Delta TEB$ $(L.U.L)$ ⇒BT=AF (2).Din (1) și (2) ⇒ $AB = BT$ (3)	1
În ΔABC isoscel ,AE bisectoarea lui A ⇒ AE mediatoarea (BC), dar T∈ AE ⇒ $TB = TC$ (4)	1
Din AB=AC, (3) și (4) ⇒ $ABTC$ romb	1