OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 25.02.2018 -

CLASA A VIII-A
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

I. Se consideră numerele R și S unde:

$$R=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\sqrt{2}-1}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}+\frac{\sqrt{3}+1}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}+\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}\right],\text{ iar}$$

$$S=\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{3}+1}-\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right).$$ Arătați că numărul $R-S$ este rațional.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Notăm $a=\sqrt{2}-1$, $b=\sqrt{3}+1$ și $c=\sqrt{2}+\sqrt{3}$.	**1p**
Atunci $R=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$, iar $S=\dfrac{bc+ac-ab}{abc}$.	**3p**
Obținem $R-S=\dfrac{(a+b-c)^2}{2abc}$.	**2p**
Cum $a+b=c$, rezultă $R-S=0\in\mathbb{Q}$	**1p**

II. 1) Determinați toate perechile de numere naturale (m,n) cu proprietatea $m^3=n^3+n^2+7n+1$.

2) Demonstrați că, dacă a este un număr real, $\frac{1}{3}\le a\le 10$, atunci $\frac{\sqrt{3}}{28}\le\frac{\sqrt{a}}{a+9}\le\frac{1}{6}$.

Menționați cazurile de egalitate.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
1) Observăm că $m^3>n^3$, iar dacă $n\ge 3$, atunci $(n+1)^3=m^3+2n(n-2)>m^3$, adică $n^3<m^3<(n+1)^3$ și nu avem soluții.	**1p**
Deducem că $n\le 2$ și obținem perechile $(m,n)\in\{(1,0),(3,2)\}$.	**2p**
2) Inegalitatea din dreapta este echivalentă cu $\left(3-\sqrt{a}\right)^2\ge 0$, adevărată oricare ar fi $a\ge\frac{1}{3}$, cu egalitate pentru $a=9$.	**2p**
După ridicare la pătrat, prima inegalitate este echivalentă cu $3a^2-730a+243\le 0$ sau $(3a-1)(a-243)\le 0$. Deoarece $3a-1\ge 0$ și $a-243<0$ ultima inegalitate este adevărată. Egalitatea se obține pentru $a=\frac{1}{3}$.	**2p**

III. Se consideră un tetraedru regulat cu lungimea muchiei de 2cm. Pe suprafața tetraedrului se consideră, la întâmplare, 9 puncte, în interiorul fețelor.

Arătați că cel puțin două dintre cele 9 puncte se află la o distanță mai mică de 1cm unul față de celălalt.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Ducând liniile mijlocii pe fețele tetraedrului, obținem $4\cdot 4=16$ triunghiuri echilaterale cu latura de 1cm. Deasemenea, apar patru tetraedre regulate cu muchia de 1cm, fiecare având un vârf comun cu câte un vârf al tetraedrului mare. Dacă două din cele 9 puncte sunt situate pe fețele exterioare ale unui tetraedru mic, atunci distanța dintre ele este mai mică de 1cm și problema este rezolvată.	3p
Dacă cel mult unul din cele 9 puncte este situat pe fețele exterioare ale unui tetraedru mic, atunci rămân cel puțin $9-4=5$ puncte care vor fi situate în interiorul, sau pe laturile celor patru triunghiuri echilaterale centrale (fără vârfuri) de pe fețele tetraedrului mare.	2p
Conform principiului cutiei vor exista două puncte care sunt situate în interiorul sau pe laturile unuia dintre triunghiurile centrale (fără vârfuri) de pe o față a tetraedrului mare. Distanța dintre aceste două puncte este mai mică de 1cm.	2p

IV. În planul β se consideră un patrulater convex oarecare, *ABCD*, care nu este paralelogram. Punctul *V* nu este situat în planul β. Un plan α intersectează interioarele segmentelor *VA*, *VB*, *VC* și *VD* în punctele *M*, *N*, *P*, respectiv *Q* astfel încât $\frac{MA}{MV}=m$, $\frac{NB}{NV}=n$, $\frac{PC}{PV}=p$ și $\frac{QD}{QV}=q$.

Știind că $m+p=n+q=k$, $m\neq p, n\neq q$, arătați că planul α intersectează planul β după o dreaptă paralelă cu dreapta determinată de mijloacele diagonalelor patrulaterului *ABCD*.

Cecilia Deaconescu & Radu Deaconescu, Pitești, G.M.B. nr.6-7-8/2017

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Notăm $m+p=n+q=k$, *R* mijlocul diagonalei *BD*, $VR\cap QN=\{E\}$, *S* mijlocul diagonalei *AC*, $VS\cap MP=\{F\}$. Considerăm triunghiul *VDB*. Paralelele la dreapta *VR* duse prin *D* și respectiv *B* intersectează dreapta *QN* în *X*, respectiv *Y*. Din asemănarea triunghiurilor *DXQ* și *VEQ* obținem $p=\frac{DD}{QV}=\frac{XD}{VE}$, iar, din asemănarea triunghiurilor *BYN* și *VEN*, obținem $n=\frac{NB}{NV}=\frac{BY}{VE}$. Atunci $k=n+p=\frac{XD+BY}{VE}$. Cum segmentul *RE* este linie mijlocie în trapezul *BDXY*, obținem $\frac{ER}{EV}=\frac{k}{2}$.	3p
Raționând analog în triunghiul *VAC*, obținem $\frac{ES}{EV}=\frac{k}{2}$. În concluzie, din *reciproca teoremei lui Thales* aplicată în triunghiul *VRS*, obținem $EF \parallel RS$. ($R\neq S$ deoarece *ABCD* nu este paralelogram.)	2p
Deoarece $m\neq p, n\neq q$, rezultă că $MP\cap AC\neq\varnothing$ și $NQ\cap BD\neq\varnothing$, deci $\alpha\cap\beta=d$. Cum $EF\subset\alpha, RS\subset\beta$, rezultă că $EF \parallel d \parallel RS$.	2p