MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 23.02.2018
CLASA a X-a

Problema I. (7 puncte)

Să se determine numerele raţionale x şi y pentru care $\frac{x}{\sqrt[3]{5+3\sqrt{3}}}+\frac{2y}{\sqrt[3]{4(2+\sqrt{5})}}=\frac{1}{\sqrt[3]{7\sqrt{5}+9\sqrt{3}}}$.

prof.Camelia Maria Magdaș, Colegiul Naţional "Andrei Mureșanu" Dej

Problema II. (7 puncte)

Arătaţi că pentru orice numere reale strict pozitive a,b,c cu a + b + c = 1 are loc:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2+b^2+c^2}} \leq \sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2} \leq \sqrt[3]{3}.$$

prof. Marilena Faiciuc, Colegiul Naţional Pedagogic "Gh. Lazăr", Cluj-Napoca

Problema III. (7 puncte)

Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n$ sunt numere reale pozitive cu proprietatea $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$, să se arate că:

$$\log_2(a_1+1)+\log_2(a_2+2^2)+\log_2(a_3+2^4)+\ldots+\log_2\left(a_n+2^{2(n-1)}\right) \geq \frac{n(n+1)}{2}.$$

prof. Teodor Poenaru, Cluj Napoca

Problema IV. (7 puncte)

Fie ecuaţia $\frac{z^4+1}{z^3+z}=2\alpha$, cu $\alpha \in R$, $|\alpha|<\frac{1}{2}$, $z \neq 0$, $z \neq \pm i$.

a) Să se arate că ecuaţia nu are rădăcini reale.
b) Să se determine numărul real α, ştiind că imaginile în planul complex ale rădăcinilor ecuaţiei, sunt vârfurile unui dreptunghi şi să se reprezinte în acest caz imaginile rădăcinilor în planul complex.

prof.Eugen Jecan, Colegiul Naţional "Andrei Mureșanu" Dej

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru - 3 ore.

SUCCES!