OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 23.02.2018
CLASA a XI-a

Problema I. (7 puncte)

În mulțimea $M_3(R)$ se consideră matricea A(a)=$\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$.

a) Arătați că A(a)+A(b)=A(a+b) și A(a)·A(b)=A(2ab).
b) Rezolvați ecuația A($\log_2 x^2+1$)·A($\log_2 x-2$)=A(14).
c) Demonstrați că $2A^n$(a)=A($(2a)^n$) $\forall\, n\in N^*$ și determinați n astfel încât

$$2(A(1)+A^2(1)+\ldots+A^n(1))=A(2046).$$

prof. Anca Cristina Hodorogea – ISJ Cluj

Problema II. (7 puncte)

Se consideră şirul

$$(a_n)_{n\geq 1},\ a_n=\frac{1}{3\sqrt{1}+1\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{2}+2\sqrt{4}}+\frac{1}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{(n+2)\sqrt{n}+n\sqrt{n+2}},\ n\in\mathbb{N}^*.$$

a) Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.
b) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\left(2a_n-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{n}}$.

prof. Alb Nicolae, LiceulTeoretic "Octavian Goga" Huedin

Problema III. (7 puncte)

Fie matricea $A\in M_2(C)$.

a) Să se arate că $\det(A-xI_2)=x^2-(trA)x+\det A, \forall x\in C$.
b) Dacă $A\in M_2(C)$ și $trA=3, \det A=-4$ să se arate că matricea A^2+2I_2 este nesingulară.

prof.Camelia Maria Magdaș, prof.Corina Dragoș, Colegiul Naţional "Andrei Mureșanu" Dej

Problema IV. (7 puncte)

Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere reale, dat de relatia de recurenţă

$x_1=0,\ x_{n+1}=x_n+n(n+1),\ \forall n\geq 1$. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} n^2\left[\ln\frac{4}{3}+\ln\left(\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{x_i}\right)\right]$.

prof.Camelia Maria Magdaș, prof.Corina Dragoș, Colegiul Naţional "Andrei Mureșanu" Dej

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru - 3 ore.

SUCCES!