Barem clasa a XII-a
(OLM 2018-etapa locală)

Problema I. (7 puncte)

Arătăm mai întâi că $ab^2 = b^2 a$. Avem:

$ab^2 = abaa^{-1}b = ba^2ba^{-1}b = (ba^2)(ba^{-1}b) = ba^2(ba^2b) = (ba^2)(aba) = ba^3ba = b^2a$. Am folosit că $a^3 = e$ ……..…….**(3p)**

Demonstrăm acum că $ab^{2018} = b^{2018}a$. Avem succesiv:

$ab^{2018} = a(b^2)^{1009} = ab^2b^2 \ldots\ldots b^2 = b^2ab^2 \ldots\ldots b^2 = b^2b^2ab^2 \ldots\ldots b^2 = \cdots \ldots$ ……………...………………**(1p)**

$b^{2018}a = (b^2)^{1009}a = b^2b^2 \ldots\ldots b^2a = b^2b^2 \ldots\ldots ab^2 = b^2b^2 \ldots ab^2 \ldots b^2 = \cdots \ldots$ ……………...………………**(1p)**

Folosind că $b^{2018} = b$, avem că $ab = ba \Rightarrow aba = ba^2$. ……………...……………**(1p)**

Dar $aba = ba^2b$, deci $ba^2 = ba^2b$ şi simplificând la stânga cu ba^2, obţinem $b = e$.……………...…...……………**(1p)**

Problema II. (7 puncte)

Fie $g(x) = e^{\cos x} + \sin x$

Atunci $g'(x) = -\sin x \cdot e^{\cos x} + \cos x$ .... **(2p)**

și $g'(x) + \sin x \cdot g(x) = \sin^2 x + \cos x = 1 - \cos^2 x + \cos x$ ....**(2p)**

Avem $\int \frac{1-\cos^2 x + \cos x}{e^{\cos x} + \sin x} dx = \int \frac{g'(x) + \sin x \cdot g(x)}{g(x)} dx = \ln|g(x)| - \cos x + C$.. **(3p)**

Problema III. (7 puncte)

$\int_0^{2018} (\log_{2018}(x+1) + 2018^x) dx \geq 2018^2 + 2018$ ....**(2p)**

$\int_0^{2018} (\log_{2018}(x+1) + 2018^x - 1) dx \geq 2018^2$..**(2p)**

Considerăm $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = 2018^x - 1$ funcţie continuă, strict crescătoare şi $f(0) = 0$, care

îndeplineşte condiţiile din Inegalitatea lui Young $\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy \geq ab$, $a > 0, b \in f(\mathbb{R}_+)$. ....**(2p)**

$\int_0^{2018} (2018^x - 1)dx + \int_0^{2018} \log_{2018}(x+1)\, dx \geq 2018^2$..**(1p)**

Problema IV. (7 puncte)

Derivând obținem $f(x) = 2018 \cdot f^{2017}(x) f'(x) \;\; \rightarrow f^{2016}(x) f'(x) \; = \frac{1}{2018} \;\; \rightarrow$ ....**(2p)**

$2017 \cdot f^{2016}(x) f'(x) \; = \frac{2017}{2018}$ și integrând obținem $f^{2017}(x) = \frac{2017}{2018} x + c \;\; \rightarrow$ ....**(1p)**

$f(x) = \sqrt[2017]{\frac{2017}{2018} x + c}$ și pentru $x = 0$ avem $\sqrt[2017]{c}^{2018} - 2018 = 0 \; \rightarrow c = 2018^{\frac{2017}{2018}}$.......... ....**(2p)**

$f(2018) = \sqrt[2017]{\frac{2017}{2018} 2018 + 2018^{\frac{2017}{2018}}} \; \rightarrow \; f(2018) = \sqrt[2017]{2017 + 2018^{\frac{2017}{2018}}}$..**(2p)**