Barem clasa a VII-a
(OLM 2018-etapa locală)

Problema I. (7 puncte)

a) Ultima cifră a numărului 2017^{2018} este 9, iar ultima cifră a numărului 2018^{2017} este 8, așadar ultima cifră a sumei este 7, deci suma nu poate fi pătrat perfect........................**(4p)**

b) Deoarece $2018^{k} = (2017+1)^{k} = M_{2017}+1 \ \left(k \in N^{*}\right)$, rezultă că $2018 + 2018^{2} + ... + 2018^{2017} = M_{2017} + 2017$, sumă divizibilă cu 2017, pentru că fiecare termen al sumei se divide cu 2017. ....**(3p)**

Problema II. (7 puncte)

a) $N = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(1+2+\cdots+n)}{\sqrt{\frac{2}{4}}+\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}} = n(n+1) \in \mathbb{N}$............................**(2p)**

$n(n+1)$ produs de doua numere consecutive $\Rightarrow$ nu este pătrat perfect................................**(1p)**

b) Obține rezultatul corect folosind distributivitatea ……………………………………………… **(2p)**
Deoarece $2018 = 2 \cdot 1009$ iar 1009 este un număr prim, atunci singurele descompuneri posibile ale lui 2018 sunt $1 \cdot 2018$ sau $2 \cdot 1009$. …………………..…………………………………………..**(1p)**
Atât prima descompunere cât și a doua sunt produsul dintre un număr par și un număr impar.
Deoarece $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, oricare ar fi a, b naturale, atunci avem următoarele cazuri:
1. a par, b par , atunci $= (a+b)(a-b) \ \vdots \ 4$, nu corespunde
2. a impar, b par , atunci $= (a+b)(a-b)$ este impar, nu corespunde
3. a impar, b impar , atunci $= (a+b)(a-b) \ \vdots \ 4$, nu corespunde
Deci 2018 nu poate fi scris ca diferență de două pătrate perfecte ……………………………… **(1p)**

Problema III. (7 puncte)

Desen corect...(1p)

Deoarece M este mijlocul lui $[CD]$, iar $CD = 2AB$ obţinem că $AB \parallel MC$ şi $AB = MC$ deci $ABCM$ este paralelogram…………………………………………………………………………………**(1p)**

Analog ABMD este paralelogram.. **(1p)**

Dacă $\{O\} = BM \cap AC$ atunci AO este mediană în ΔABM . Cum MN este mediană în ΔABM şi $MN \cap AO = \{P\}$,obţinem că punctul P este centrul de greutate al ΔABM ....**(1p)**

În consecinţă $A_{APN} = \frac{1}{3} A_{ANM} = \frac{1}{6} A_{ABM}$, deci $A_{ABM} = 72 cm^2$ ....**(2p)**

Dar $A_{ABM} = A_{ADM} = A_{BMC}$ şi atunci $A_{ABCD} = 3 \cdot A_{ABM} = 216 cm^2$ ....**(1p)**

Problema IV. (7 puncte)

Desen corect..(1p)

a) $\Delta ABC \overset{T.bis.}{\Longrightarrow} \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow BD = \frac{ac}{b+c}$ şi $\frac{DC}{BD} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow DC = \frac{ab}{b+c}$......................................**(2p)**

b) Analog ca la pct a) se dem. că : $EC = \frac{ab}{a+c}$; $AE = \frac{bc}{a+c}$; $AF = \frac{bc}{a+b}$; $BF = \frac{ac}{a+b}$...........**(1p)**

$$\frac{1}{BD}+\frac{1}{DC}+\frac{1}{EC}+\frac{1}{AE}+\frac{1}{AF}+\frac{1}{FB}=\frac{b+c}{ac}+\frac{b+c}{ab}+\frac{a+c}{ab}+\frac{a+c}{bc}+\frac{a+b}{bc}+\frac{a+b}{ac}=2\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}+\frac{a}{bc}\right)$$

Finalizare: $\frac{(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2}{abc}$ .... **(1p)**

c) Folosind $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1 \Rightarrow ab+bc+ac=abc$ şi $a^2+b^2 \geq 2ab$ (şi analoagele) .... **(1p)**

$\frac{(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2}{abc} \geq \frac{4ab+4ac+4bc}{abc} = 4$ .... **(1p)**