Barem clasa a XI-a
(OLM 2018-etapa locală)

Problema I. (7 puncte)

a) Se verifică prin calcul direct..**(2p)**

b) Conform punctului a) obținem: $A(2(\log_2 x^2+1)(\log_2 x-2))$=A(14)................................ **(1p)**

Notăm $\log_2 x$=t, $x>0$ și obținem ecuația $2t^2-3t-9=0$, cu soluțiile t_1=3 și $t_2=\frac{-3}{2}$, respectiv revenind la notație x_1=8 și $x_2=2^{\frac{-3}{2}}$..**(1p)**

c) Se demonstrează prin inducție matematică.. **(1p)**

Aplicând relația demonstrată și adunând relațiile obținem:

$2(A(1)+A^2(1)+...+A^n(1))=A(2+2^2+...+2^n)=A(2046)$ ....**(1p)**

$2(2^n-1)=2046$, n=10. .... **(1p)**

Problema II. (7 puncte)

a) $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{(n+3)\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n+3}}>0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, deci a_n = strict crescător..........................**(2p)**

$a_n=\frac{1}{\sqrt{1\cdot3}(\sqrt{3}+\sqrt{1})}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot4}(\sqrt{4}+\sqrt{2})}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot5}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{\sqrt{1\cdot3}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot4}}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3\cdot5}}+\cdots+\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+2)}}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+2}}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+2}}\right)$..**(2p)**

Avem $0<a_n<\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}<1$, de unde a_n =mărginit. Astfel,şirul(a_n) este convergent, având $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. ....**(1p)**

b) $\lim_{n\to\infty}\left(2a_n-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1$, iar $\lim_{n\to\infty}\left(2a_n-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{n}}$ este de tipul 1^∞şi este egală cu e^{-2}...........**(2p)**

Problema III. (7 puncte)

a) Se verifică prin calcul direct ....**(3p)**

b) Din ecuaţia lui Cayley-Hamilton avem că $A^2-3A-4I_2=0_2$..**(1p)**

de unde $A^2+2I_2=3(A+2I_2)$...**(1p)**

Atunci $\det(A^2+2I_2)=3^2\cdot\det(A+2I_2)$ ....**(1p)**

Folosind subpunctul a), pentru $x=-2$, avem că $\det(A+2I_2)=(-2)^2-3(-2)-4=6$, deci $\det(A^2+2I_2)=54\neq0$,adică matricea A^2+2I_2 este nesingulară...**(1p)**

Problema IV. (7 puncte)

Dând valori lui n în relaţia de recurenţă și însumând obţinem

$x_n = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n\cdot(n-1) = \sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \sum_{k=1}^{n}\left(k^2 - k\right) = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$ ....**(3p)**

Atunci $\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{x_i} = \frac{3}{2}\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i(i+1)(i-1)} = \frac{3}{2}\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{i-1} - \frac{2}{i} + \frac{1}{i+1}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$..**(2p)**

$\lim_{n\to\infty} n^2\left[\ln\frac{4}{3} + \ln\frac{3}{4}\frac{n^2+n-2}{n^2+n}\right] = \lim_{n\to\infty} n^2 \ln\frac{n^2+n-2}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty}\ln\left(1 - \frac{2}{n^2+n}\right)^{n^2} = \ln e^{-2} = -2$ ....**(2p)**