Barem clasa a X-a
(OLM 2018-etapa locală)

Problema I. (7 puncte)

Amplificând fiecare fracţie cu $\sqrt[3]{2}$ ....(2p)

$$\frac{x\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}+\frac{2y\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8(2+\sqrt{5})}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{14\sqrt{5}+18\sqrt{3}}}\Leftrightarrow\frac{x\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}+1\right)^3}}+\frac{2y\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{\left(\sqrt{5}+1\right)^3}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^3}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{x\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}+1}+\frac{2y\sqrt[3]{2}}{\sqrt{5}+1}=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\Leftrightarrow\frac{x}{\sqrt{3}+1}+\frac{2y}{\sqrt{5}+1}=\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\Leftrightarrow$$ ....(5p)

$$x\left(\sqrt{3}-1\right)+y\left(\sqrt{5}-1\right)=\sqrt{5}-\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{3}(x+1)+\sqrt{5}(y-1)-x-y=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-1\ ,\ y=1$$

Problema II. (7 puncte)

Pentru inegalitatea din dreapta folosim inegalitatea lui Jensen pentru funcţia concavă

$f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ ....(1p)

$f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)\geq\frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3}\Leftrightarrow\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}\leq 3\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\Leftrightarrow\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}\leq\sqrt[3]{3}$......... (2p)

Pentru inegalitatea din stânga folosim inegalitatea lui Jensen pentru funcţia convexă

$f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x^{-\frac{1}{3}}$ ....(1p)

$$f\left(\frac{a}{a+b+c}\cdot a+\frac{b}{a+b+c}\cdot b+\frac{c}{a+b+c}\cdot c\right)\leq\frac{a}{a+b+c}\cdot f(a)+\frac{b}{a+b+c}\cdot f(b)+$$

$+\frac{c}{a+b+c}\cdot f(c)\Leftrightarrow f(a^2+b^2+c^2)\leq af(a)+bf(b)+cf(c)\Leftrightarrow$.....................................(2p)

$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2+b^2+c^2}}\leq\frac{a}{\sqrt[3]{a}}+\frac{b}{\sqrt[3]{b}}+\frac{c}{\sqrt[3]{c}}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt[3]{a^2+b^2+c^2}}\leq\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}$..........................(1p)

Problema III. (7 puncte)

$$\log_2(a_1+1)+\log_2(a_2+2^2)+\log_2(a_3+2^4)+\ldots+\log_2\left(a_n+2^{2(n-1)}\right)=$$

$\log_2(a_1+1)(a_2+2^2)(a_3+2^4)\ldots\left(a_n+2^{2(n-1)}\right)\overset{(1)}{\geq}$ ....**(2p)**

$\overset{(1)}{\geq}\log_2 2^{1+2+3+\cdots+n}\sqrt{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}$ ....**(1p)**

$=\log_2 2^{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{n(n+1)}{2}$. ....**(1p)**

(1) Inegalitatea mediilor pentru $(a_1+1);\ (a_2+2^2);(a_3+2^4);\ldots\left(a_n+2^{2(n-1)}\right)$...............**(3p)**

Problema IV. (7 puncte)

a) Ecuaţia se mai scrie $z^4-2\alpha z^3-2\alpha z+1=0$. Împărţind cu $z^2\neq 0$, obţinem $z^2+\frac{1}{z^2}-2\alpha\left(z+\frac{1}{z}\right)=0$, care cu substituţia $z+\frac{1}{z}=t$, devine $t^2-2\alpha t-2=0$, cu soluţiile $t_{1,2}=\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+2}$ ....**(2p)**

Ecuaţia dată se scrie $\left[t-\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2+2}\right)\right]\left[t-\left(\alpha-\sqrt{\alpha^2+2}\right)\right]=0$
sau $\left[z^2-\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2+2}\right)z+1\right]\left[z^2-\left(\alpha-\sqrt{\alpha^2+2}\right)z+1\right]=0$ ....**(1p)**

Deoarece $\left|\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+2}\right|\leq|\alpha|+\left|\sqrt{\alpha^2+2}\right|<\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2$, rezultă că ecuaţia dată nu are rădăcini reale....... **(1p)**

b) Rădăcinile complexe ale ecuaţiei sunt

$z_{1,2}=\frac{1}{2}\left[\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2+2}\right)\pm i\sqrt{4-\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2+2}\right)^2}\right]$ şi $z_{3,4}=\frac{1}{2}\left[\left(\alpha-\sqrt{\alpha^2+2}\right)\pm i\sqrt{4-\left(\alpha-\sqrt{\alpha^2+2}\right)^2}\right]$......................**(1p)**

Imaginile rădăcinilor în planul complex sunt vârfurile unui trapez isoscel. Pentru ca să fie dreptunghi trebuie ca partea imaginară a rădăcinilor $z_{1,2}$ şi a rădăcinilor $z_{3,4}$ să fie aceeaşi. Prin urmare $\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2+2}\right)^2=\left(\alpha-\sqrt{\alpha^2+2}\right)^2$, care ne conduce la $\alpha=0$. Rădăcinile ecuaţiei $z^4=-1$, $z_k=\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}$, $k\in\{0,1,2,3\}$ au imaginile la intersecţia cercului unitate cu prima şi a doua bisectoare şi sunt vârfurile unui pătrat.. **(2p)**