# O PROPRIETATE DE FASCICUL
# CONCURENTĂ TEOREMEI MENELAUS

de Silviu Boga, profesor, Iași

## INTRODUCERE

Scopul acestui tutorial este de a scoate din anonimat o proprietate geometrică la prima vedere banală dar care, după cum lesne se va observa din exemplele ce o urmează, ascunde calităţi de unealtă de raţionament demne spre a o înscrie în rândul teoremelor remarcabile din geometria elementară.

## SUMAR

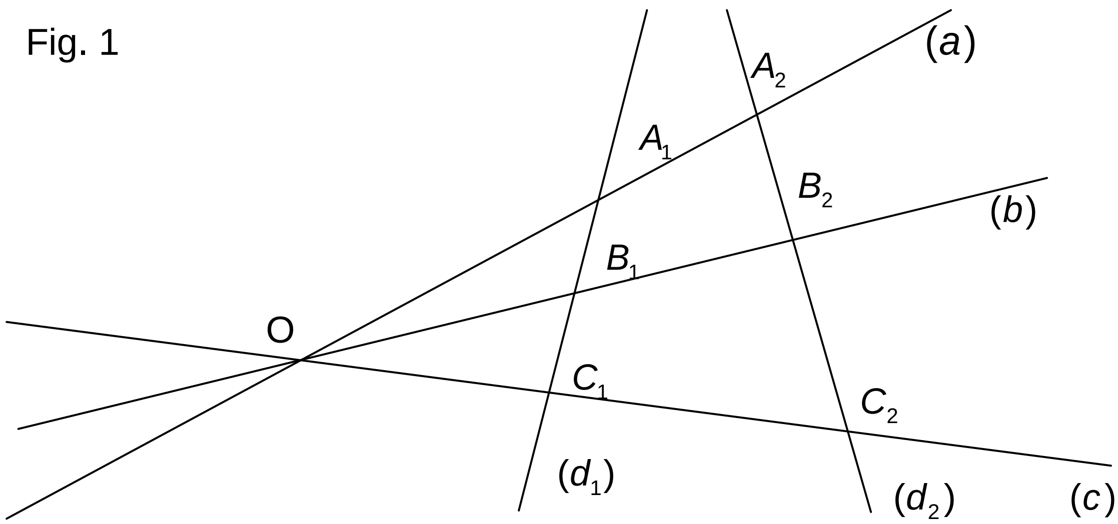
**Teorema 1:** Fie $(a;b;c)$ fascicul de trei drepte coplanare distincte şi incidente într-un punct $O$ iar $(d_1)$ şi $(d_2)$ două transversale care le taie în punctele $A_1, B_1, C_1 \in d_1$ şi $A_2, B_2, C_2 \in d_2$. Atunci are loc relaţia

$$\frac{A_1B_1}{A_1C_1} \cdot \frac{OC_1}{OB_1} = \frac{A_2B_2}{A_2C_2} \cdot \frac{OC_2}{OB_2} = \frac{\sin(a;b)}{\sin(a;c)}$$

în care prin $(a;b)$, respectiv prin $(a;c)$, se înţelege măsura unuia din unghiurile determinate de dreptele specificate prin notaţie.

**Demonstraţie:** Se aplică relaţia sinusurilor în $\Delta OA_1B_1$, respectiv în $\Delta OA_1C_1$, (fig. 1) din care este imediată $\frac{A_1B_1}{A_1C_1} \cdot \frac{OC_1}{OB_1} = \frac{\sin(a;b)}{\sin(a;c)}$. Analog $\frac{A_2B_2}{A_2C_2} \cdot \frac{OC_2}{OB_2} = \frac{\sin(a;b)}{\sin(a;c)}$ şi relaţia din enunţul teoremei este astfel demonstrată.

Fig. 1




**Observaţii:**

1. Cum ordinea este nesemnificativă, proprietatea enunţată se manifestă totodată şi prin relaţiile analoge:

$$\frac{B_1A_1}{B_1C_1} \cdot \frac{OC_1}{OA_1} = \frac{B_2A_2}{B_2C_2} \cdot \frac{OC_2}{OA_2} = \frac{\sin(b;a)}{\sin(b;c)},$$

respectiv

$$\frac{C_1A_1}{C_1B_1} \cdot \frac{OB_1}{OA_1} = \frac{C_2A_2}{C_2B_2} \cdot \frac{OB_2}{OA_2} = \frac{\sin(c;a)}{\sin(c;b)}$$

2. Relaţiile de mai sus rămân valabile indiferent de poziţia celor două transversale faţă de centrul fasciculului.

3. Se poate folosi şi exprimarea sub formă de biraport:

$$\frac{A_1B_1}{A_1C_1} : \frac{OB_1}{OC_1} = \frac{A_2B_2}{A_2C_2} : \frac{OB_2}{OC_2} = \frac{\sin(a;b)}{\sin(a;c)}$$

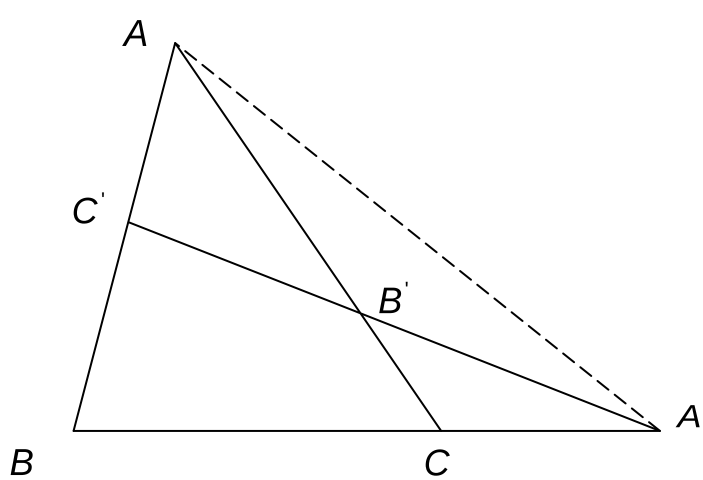
Se va observa în continuare cum aplicarea acestei proprietăţi de fascicul oferă cale de demonstrare la numeroase proprietăţi metrice mai mult sau mai puţin familiare cititorilor, unele demonstraţii remarcându-se de-a dreptul spectaculos prin eleganţa raţionamentului.

## EXEMPLE DE RELAŢII METRICE CLASICE DEMONSTRATE CU TEOREMA 1

**Exemplul 1:** (Teorema Menelaus) Dacă $(d)$ este o dreaptă secantă la laturile triunghiului $ABC$, care nu trece prin nici-unul din vârfurile triunghiului şi taie dreptele suport ale laturilor respectiv în punctele $A' \in BC$, $B' \in AC$ şi $C' \in AB$, atunci are loc relaţia $\frac{AC' \cdot BA' \cdot CB'}{C'B \cdot A'C \cdot B'A} = 1$.

**Demonstraţie:** Considerând fasciculul de drepte $(A'A; A'C'; A'B)$ cu transversalele $AB$ şi $AC$ (fig. 2), conform teoremei 1 are loc $\frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{A'B}{A'A} = \frac{B'A}{B'C} \cdot \frac{A'C}{A'A}$, din care relaţia Menelaus este imediată.

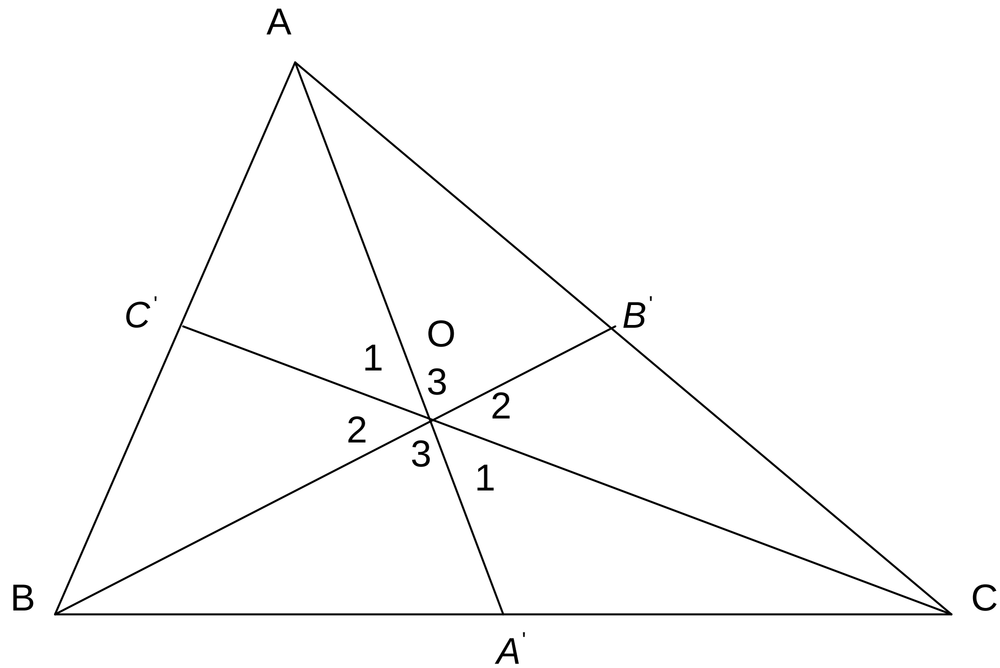
Fig. 2




**Exemplul 2:** (Teorema Ceva) Fie triunghiul $ABC$ şi punctele $A' \in BC$, $B' \in AC$, $C' \in AB$, altele decât vârfurile triunghiului, cu $AA' \cap BB' \cap CC' = \{O\}$. Atunci are loc relaţia $\frac{AC' \cdot BA' \cdot CB'}{C'B \cdot A'C \cdot B'A} = 1$.

**Demonstraţie:** Considerând fasciculul $(OA; OC'; OB)$ cu transversala $AB$ (fig. 3), conform teoremei 1 are loc $\frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{OB}{OA} = \frac{\sin O_1}{\sin O_2}$. Analog pe celelalte două laturi şi din cele trei relaţii obţinute relaţia Ceva este imediată.

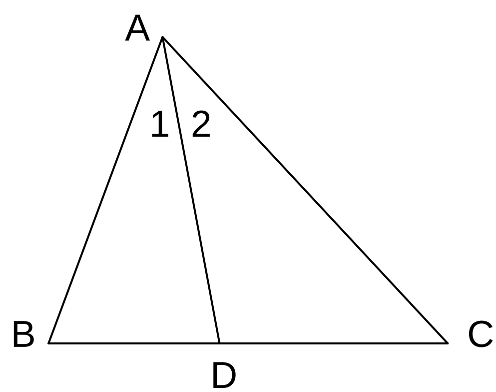
Fig. 3




**Exemplul 3:** (Teorema bisectoarei) Dacă $[AD$ este bisectoare pentru $\angle BAC$ în $\Delta ABC$ atunci are loc relaţia $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

**Demonstraţie:** Considerând fasciculul $(AB;AD;AC)$ cu transversala $BC$ (fig. 4), conform teoremei 1 are loc relaţia $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{AC}{AB} = \frac{\sin A_1}{\sin A_2}$ şi cum $A_1$ şi $A_2$ sunt măsurile celor două unghiuri determinate de $[AD$ în $\angle BAC$, relaţia bisectoarei este imediată.

Fig. 4

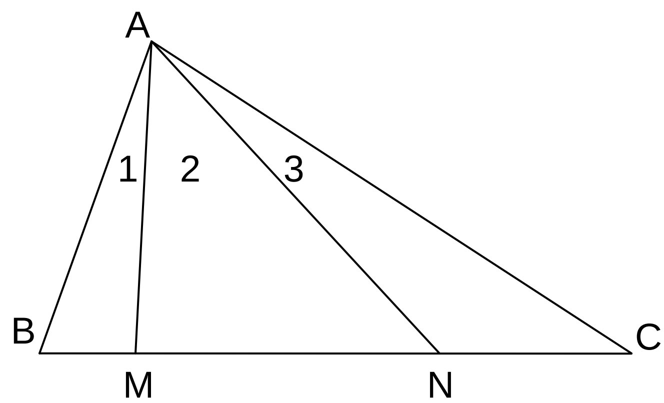



**Observaţie:** Justificare analogă are şi teorema bisectoarei exterioare.

**Exemplul 4:** (Teorema Steiner) Dacă $[AM$ şi $[AN$ sunt izogonale pentru $\Delta ABC$ atunci are loc relaţia $\frac{BM \cdot BN}{CM \cdot CN} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

**Demonstraţie:** Considerând fasciculul $(AB;AM;AC)$ cu transversala $BC$ (fig. 5), conform teoremei 1 are loc relaţia $\frac{MB}{MC}\cdot\frac{AC}{AB}=\frac{\sin A_1}{\sin(A_2+A_3)}$. Analog, folosind fasciculul $(AB;AN;AC)$ se obţine $\frac{NB}{NC}\cdot\frac{AC}{AB}=\frac{\sin(A_1+A_2)}{\sin A_3}$. Cum însă $[AM$ şi $[AN$ sunt izogonale, $A_1=A_3$ şi relaţia Steiner este imediată.

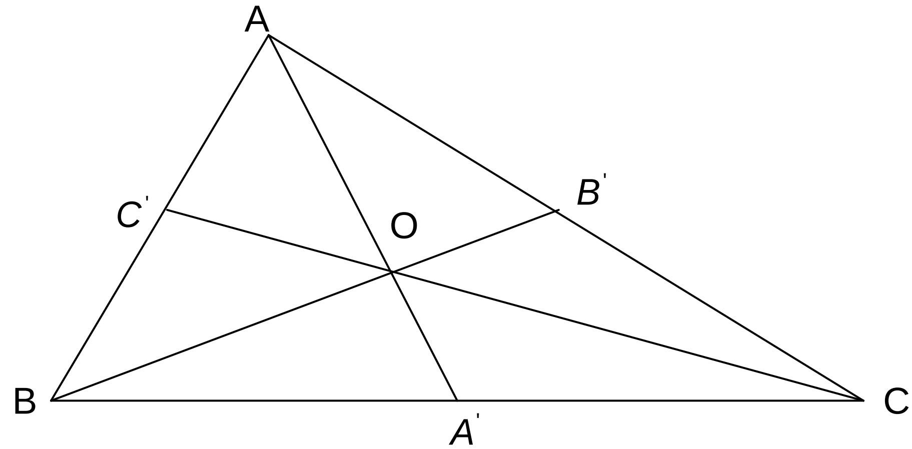
Fig. 5




**Exemplul 5:** (Teorema Van Aubel) Fie triunghiul $ABC$ şi punctele $A^{'}\in(BC)$, $B^{'}\in(AC)$, $C^{'}\in(AB)$ cu $AA^{'}\cap BB^{'}\cap CC^{'}=\{O\}$. Atunci are loc relaţia $\frac{AC^{'}}{C^{'}B}+\frac{AB^{'}}{B^{'}C}=\frac{AO}{OA^{'}}$.

**Demonstraţie:** Considerând fasciculul $(CA;CC^{'};CB)$ cu transversalele $AB$ şi $AA^{'}$ (fig. 6), conform teoremei 1 are loc $\frac{C^{'}A}{C^{'}B}\cdot\frac{CB}{CA}=\frac{OA}{OA^{'}}\cdot\frac{CA^{'}}{CA}$ din care $\frac{C^{'}A}{C^{'}B}=\frac{OA}{OA^{'}}\cdot\frac{CA^{'}}{CB}$. Analog pentru fasciculul $(BA;BB^{'};BC)$ cu transversalele $AC$ şi $AA^{'}$ şi prin sumare relaţia Van Aubel este imediată.

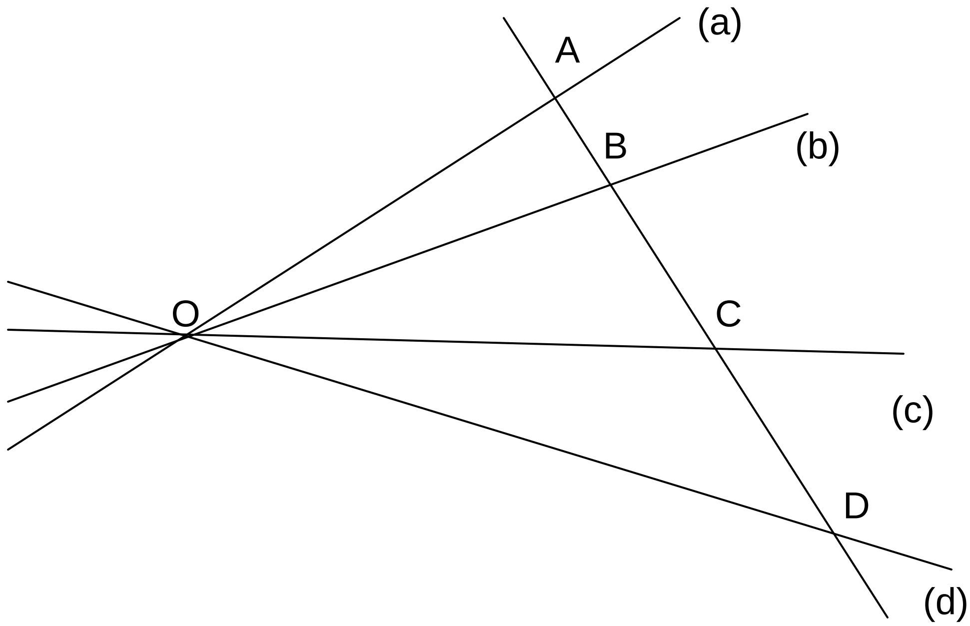
Fig. 6




**Exemplul 6:** (Teorema fasciculului anarmonic) Dacă $a\cap b\cap c\cap d=\{O\}$ este un fascicul de patru drepte distincte şi $d$ o transversală care le taie respectiv în punctele $A\in a$, $B\in b$, $C\in c$ şi $D\in d$, atunci valoarea de *biraport* $k=\frac{AB}{AC}:\frac{DB}{DC}$ nu depinde de alegerea transversalei.

**<u>Demonstraţie</u>:** Considerând fasciculul $(a;b;c)$ (fig. 7), conform cu teorema 1 are loc relaţia $\frac{AB}{AC}\cdot\frac{OC}{OB}=\frac{\sin(a;b)}{\sin(a;c)}$. Analog, alegând fasciculul $(d;b;c)$ se obţine $\frac{DB}{DC}\cdot\frac{OC}{OB}=\frac{\sin(d;b)}{\sin(d;c)}$ şi astfel $k=\frac{AB}{AC}:\frac{DB}{DC}=\frac{\sin(a;b)\cdot\sin(d;c)}{\sin(a;c)\cdot\sin(d;b)}=const.$

Fig. 7




**EXTENSII ALE TEOREMEI 1**

**<u>Teorema 2</u>:** Fie două drepte incidente $(a)\cap(b)=\{O\}$ şi un punct $M$ prin care trece o secantă $(s)$ la fasciculul celor două drepte, intersectându-le respectiv în $A\in(a)$ şi $B\in(b)$. În aceste condiţii valoarea $p=\frac{MA}{MB}\cdot\frac{OB}{OA}$ nu depinde de alegerea secantei $(s)$.

**<u>Demonstraţie</u>:** Teorema 1 justifică imediat şi această proprietate metrică.
Considerând fasciculul $(OM;OA;OB)$, (fig. 8), are loc $p=\frac{MA}{MB}\cdot\frac{OB}{OA}=\frac{\sin(\angle MOA)}{\sin(\angle MOB)}$.

**<u>Observaţie</u>:** Valoarea ”*p”* din enunţul teoremei 2 se poate denumi *putere a punctului M faţă de perechea (a; b) de drepte concurente.*

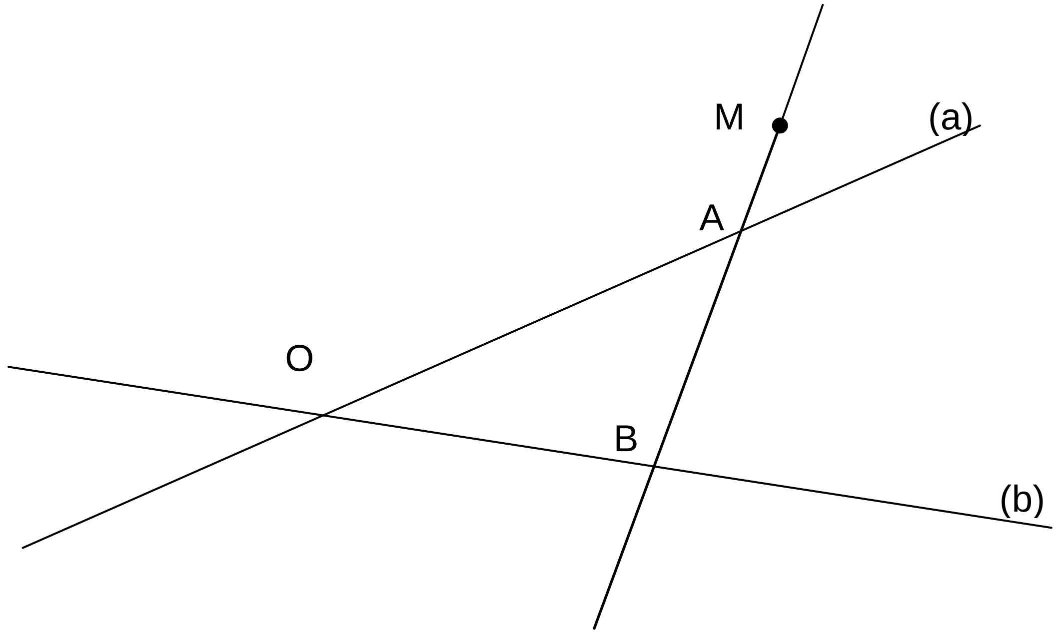


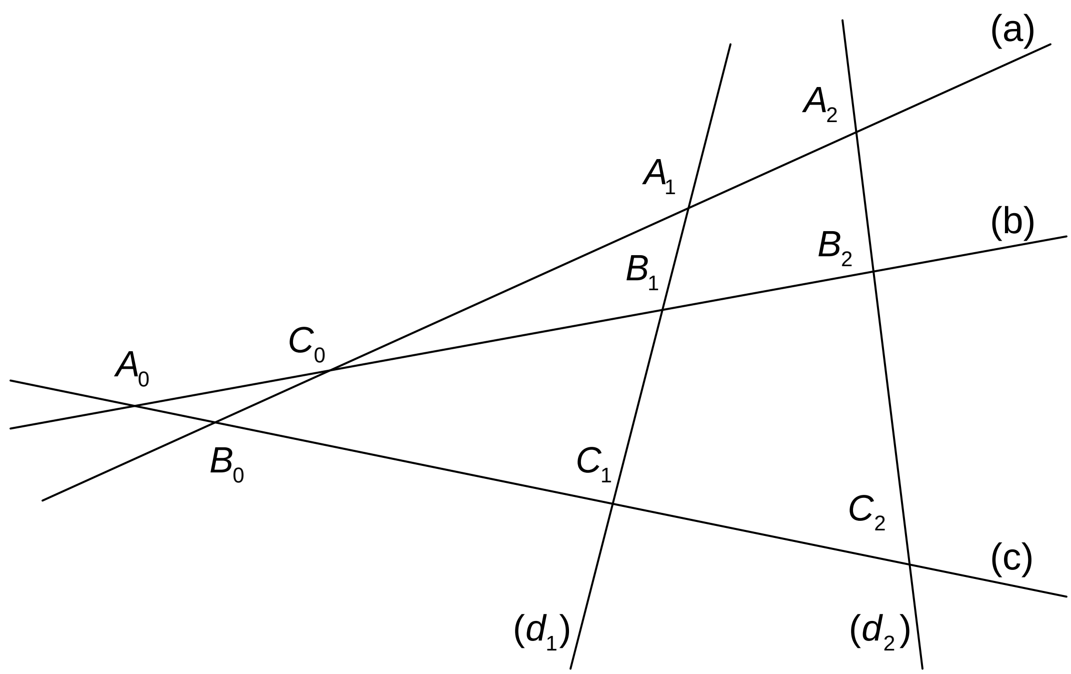

Fig. 8

**<u>Teorema 3</u>:** (generalizare la teorema 1) Fie $(a;b;c)$ un ansamblu de trei drepte concurente două câte două cu $b\cap c=\{A_0\}$, $a\cap c=\{B_0\}$ şi $a\cap b=\{C_0\}$, respectiv două transversale $(d_1)$ şi $(d_2)$ care le taie în punctele $A_1, B_1, C_1 \in d_1$ şi $A_2, B_2, C_2 \in d_2$.
Atunci are loc relaţia

$$\frac{A_1B_1}{A_1C_1}\cdot\frac{B_0C_1}{C_0B_1}=\frac{A_2B_2}{A_2C_2}\cdot\frac{B_0C_2}{C_0B_2}=\frac{\sin(a;b)}{\sin(a;c)}$$

**<u>Demonstraţie</u>:** Se aplică relaţia sinusurilor în $\Delta C_0A_1B_1$, respectiv în $\Delta B_0A_1C_1$, (fig. 9) din care este imediată $\frac{A_1B_1}{A_1C_1}\cdot\frac{B_0C_1}{C_0B_1}=\frac{\sin(a;b)}{\sin(a;c)}$. Analog $\frac{A_2B_2}{A_2C_2}\cdot\frac{B_0C_2}{C_0B_2}=\frac{\sin(a;b)}{\sin(a;c)}$ şi relaţia din enunţul teoremei este astfel demonstrată.

Fig. 9

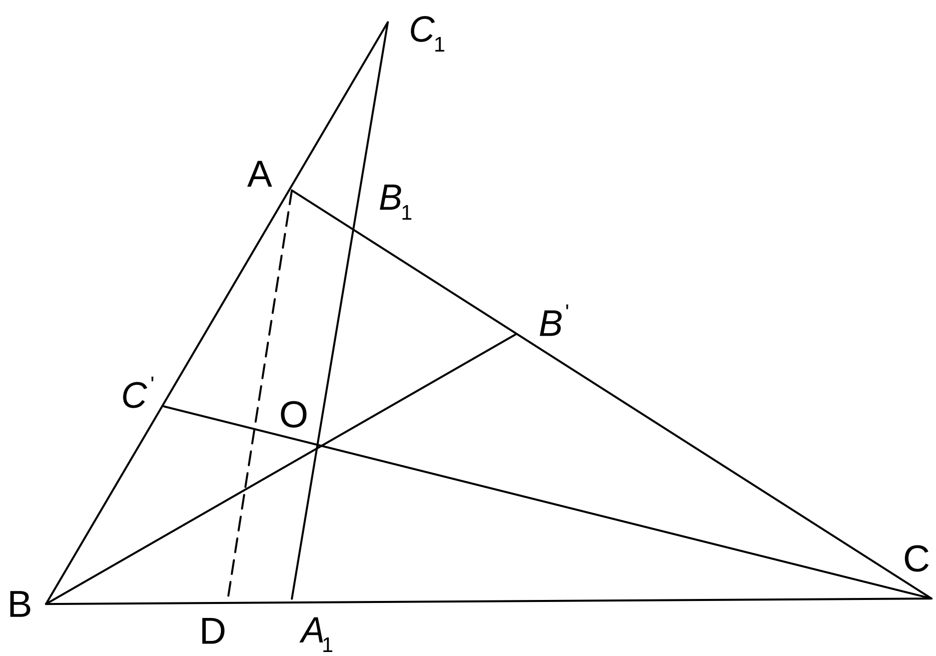


**Observaţie:** Teorema 3 este generalizare a teoremei 1. Drept urmare, ea poate fi sursa unor generalizări ale proprietăţilor demonstrate prin teorema 1. Rămâne la dispoziţia cititorului să cerceteze posibilităţi de generalizare pe exemplele prezentate.

**Teorema 4:** (Generalizare Van Aubel) Fie triunghiul $ABC$ şi punctele $B' \in (AC)$, $C' \in (AB)$ cu $BB' \cap CC' = \{O\}$. Dacă prin $O$ trece o dreaptă care taie $(BC)$ în $A_1$, $(BA$ în $C_1$ şi $(CA$ în $B_1$, atunci are loc relaţia $\frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{OA_1}{OB_1} + \frac{B'A}{B'C} \cdot \frac{OA_1}{OC_1} = 1$.

**Demonstraţie:** Considerând fasciculul $(CA;CC';CB)$ cu transversalele $AB$ şi $A_1B_1$ (fig. 10), are loc $\frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{CB}{CA} = \frac{OB_1}{OA_1} \cdot \frac{CA_1}{CB_1}$ din care $\frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{OA_1}{OB_1} = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{CA_1}{CB_1}$. Analog pentru fasciculul $(BA;BB';BC)$ cu transversalele $AC$ şi $A_1C_1$ se obţine $\frac{B'A}{B'C} \cdot \frac{OA_1}{OC_1} = \frac{BA}{BC} \cdot \frac{BA_1}{BC_1}$. Astfel relaţia din enunţ se exprimă în forma echivalentă $\frac{CA}{CB} \cdot \frac{CA_1}{CB_1} + \frac{BA}{BC} \cdot \frac{BA_1}{BC_1} = 1$. Construind $AD \parallel B_1A_1$ se observă $\frac{CA_1}{CB_1} = \frac{CD}{CA}$ şi $\frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BD}{BA}$, din care $\frac{CA}{CB} \cdot \frac{CA_1}{CB_1} + \frac{BA}{BC} \cdot \frac{BA_1}{BC_1} = \frac{CD}{CB} + \frac{BD}{BC} = 1$ şi teorema este demonstrată.

Fig. 10



**Observaţii:**

1. În configuraţia teoremei 4, atunci când $A \equiv B_1 \equiv C_1$ se obţine relaţia Van Aubel, ceea ce justifică denumirea de generalizare Van Aubel.
2. Particularizând $O \equiv G$ (centrul de greutate al triunghiului), se obţine relaţia:
$$\frac{1}{GB_1}+\frac{1}{GC_1}=\frac{1}{GA_1}$$
3. Particularizând $O \equiv I$ (centrul cercului înscris al triunghiului), se obţine relaţia:
$$\frac{AC}{IB_1}+\frac{AB}{IC_1}=\frac{BC}{IA_1}$$

În încheiere, pentru antrenarea cititorului, propun spre rezolvare doar câteva probleme, compuse de altfel cu mare uşurinţă şi care se va constata că au soluţii impresionant de simple pe baza teoremei 1. Sper că ele vor invita şi spre aprofundarea filonului creativ al acestei minunate proprietăţi metrice.

**Problema 1:** Fie patrulaterul ABCD cu $\mathrm{AD} \cap \mathrm{BC}=\{\mathrm{O}\}$ şi o dreaptă prin punctul O, distinctă de AD şi BC, care taie AB în M, respectiv DC in N. Arătaţi că ABCD este trapez daca şi numai dacă $\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}=\frac{\mathrm{ND}}{\mathrm{NC}}$.

**Problema 2:** În trapezul ABCD cu $\mathrm{AB} \parallel \mathrm{CD}$ şi $\mathrm{AC} \cap \mathrm{BD}=\{\mathrm{O}\}$, o dreaptă ce trece prin $\mathrm{O}$, distinctă de diagonalele $\mathrm{AC}$ și $\mathrm{BD}$, taie AD în P, respectiv BC în Q.
Să se arate că $\frac{\mathrm{PA} \cdot \mathrm{QB}}{\mathrm{PD} \cdot \mathrm{QC}}=\frac{\mathrm{AB}^2}{\mathrm{CD}^2}$.

**Problema 3:** Se consideră un patrulater ABCD cu $\mathrm{AC} \cap \mathrm{BD}=\{\mathrm{O}\}$ şi $\mathrm{AO}=\mathrm{OC}$, respectiv o dreaptă distinctă de diagonale care taie AD în M şi BC în N.
Să se arate că ABCD este paralelogram dacă şi numai dacă $\mathrm{MA} \cdot \mathrm{NB}=\mathrm{MD} \cdot \mathrm{NC}$.

**Problema 4:** În patrulaterul inscriptibil ABCD diagonalele se taie în O iar laturile opuse în M şi N. Arătaţi că dacă dreapta AC separă în semiplane opuse punctele M şi N atunci are loc relaţia $\frac{\mathrm{MA} \cdot \mathrm{NA}}{\mathrm{MC} \cdot \mathrm{NC}}=\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OC}}$.

**Notă finală** După cum s-a observat din cele prezentate, cadrul deosebit de larg de aplicabilitate al teoremei 1 face ca această proprietate să fie de utilitate semnificativă la rezolvarea sau la compunerea problemelor de geometrie elementară, în multe situaţii chiar concurentă teoremei Menelaus.