INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN
DOLJ

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
17 februarie 2018

Clasa a XII-a

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție " $*$ "astfel :

$$x * y = -xy + 2x + 2y - 2\,, (\forall) x, y \in \mathbb{R}\,.$$

a) Demonstrați că legea " $*$ " este asociativă .
b) Determinați $a \in \mathbb{R}$ cu proprietatea : $a * x = x * a = a\,, (\forall) x \in \mathbb{R}$.
c) Să se calculeze: $\frac{1}{2018} * \frac{2}{2018} * \frac{3}{2018} * \dots * \frac{4036}{2018}$.

2. Fie Gun grup multiplicativ cu 4 elemente, astfel încât $x^2 = e$, $(\forall) x \in G$, unde e este elementul neutru al grupului.
a) Alcătuiţi tabla operației lui G şi arătaţi că G este abelian.
b) Demonstraţi că: $(G, \ \cdot) \not\cong (\mathbb{Z}_4, +)$.

3. Fie următorul şir de integrale nedefinite:
$I_{m,n}(x) = \int sin^m x \cdot cos^n x dx, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$
a) Calculați $I_{m,1}(x)$ cu $I_{m,1}(0) = 2018$
b) Calculați $I_{1,n}(x)$ cu $I_{1,n}(0) = 0$
c) Stabiliți o relație de recurență între termenii șirului $\left(I_{m,n}(x)\right)_{m,n \in \mathbb{N}^*}$.

4. a) Să se calculeze: $\int \frac{1 - \sin x}{2\sin x + 3 \cdot (1 + \cos x) \cdot e^x} dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

b) Să se calculeze: $\int_0^3 \frac{(3-x)^{2016}}{(3+x)^{2018}} dx$.

Notă:

- *Toate subiectele sunt obligatorii;*
- *Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;*
- *Timp de lucru: 3 ore.*

Soluţii şi bareme orientative
Clasa a XII-a
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

1. a) Asociativitatea rezultă imediat din calcul.

(2p)

b) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem: $a * x = a <=> -ax + 2a + 2x - 2 = a <=>$
$<=> a(1-x) - 2(1-x) = 0 <=> a = 2$. Cum legea este comutativă avem și $x * 2 = 2$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

(3p)

c) Ținând cont de asociativitatea legii, precum și de rezultatul punctului b) , obținem:
$$\frac{1}{2018} * \frac{2}{2018} * \cdots * \frac{4035}{2018} * \frac{4036}{2018} = \frac{1}{2018} * \frac{2}{2018} * \cdots * \underbrace{\frac{4035}{2018} * 2}_{=2} = \cdots = 2.$$

(2p)

2. $a)$ Fie $G = \{e, a, b, c\}$. Atunci: $ab \neq a$, $ab \neq b \Rightarrow ab = c$. Analog $ba = c$, $ac = ca = b$, $bc = cb = a$, **(2p)**

iar tabla operației lui G este: **(1p)**

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Aşadar G este abelian. **(1p)**

$b)$ Folosind tabla operației lui $(\mathbb{Z}_4, +)$, **(1p)**

obținem că $(G,\cdot) \ncong (\mathbb{Z}_4, +)$. **(2p)**

3. a) $I_{m,1}(x) = \frac{sin^{m+1}x}{m+1} + C$. Din relația $I_{m,1}(0) = 2018$ avem că
$I_{m,1}(x) = \frac{sin^{m+1}x}{m+1} + 2018$ **(2p)**

b) $I_{1,n}(x) = -\frac{cos^{n+1}x}{n+1} + C$. Din relația $I_{1,n}(0) = 0$ avem că
$I_{1,n}(x) = -\frac{cos^{n+1}x}{n+1} + \frac{1}{n+1}$ **(2p)**

c)
$I_{m,n}(x) = \int cos^{n-1}x \cdot \left(\frac{sin^{m+1}x}{m+1}\right)' dx => I_{m,n}(x) = \frac{sin^{m+1}x \cdot cos^{n-1}x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}(x)$ **(2p)**

$I_{m,n}(x) = \frac{sin^{m-1}x \cdot cos^{n+1}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}(x)$ **(1p)**

4. a) Fie $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, f(x) = tg\frac{x}{2}$. Deoarece $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + f^2(x)\right)$,

$\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, avem: **(2p)**

$$I=\int\frac{\frac{1-\sin x}{1+\cos x}}{2\cdot\frac{\sin x}{1+\cos x}+3\cdot e^{x}}dx=\int\frac{\frac{1+f^{2}(x)}{2}-f(x)}{2f(x)+3\cdot e^{x}}dx=\int\frac{f^{'}(x)-f(x)}{2f(x)+3\cdot e^{x}}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\int\frac{\left(2f^{'}(x)+3\cdot e^{x}\right)-\left(2f(x)+3\cdot e^{x}\right)}{2f(x)+3\cdot e^{x}}dx=\frac{1}{2}\cdot\int\frac{\left(2f(x)+3\cdot e^{x}\right)^{'}}{2f(x)+3\cdot e^{x}}dx-\frac{1}{2}\cdot\int dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\ln\left(2f(x)+3\cdot e^{x}\right)-\frac{x}{2}+\mathcal{C}.$$ **(2p)**

b) Folosind substituția $t=\frac{3-x}{3+x}$, obținem: **(1p)**

$\int_0^3\left(\frac{3-x}{3+x}\right)^{2016}\cdot\left(\frac{1}{3+x}\right)^2 dx=\frac{1}{6}\int_0^1 t^{2016}\,dt=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2017}$. **(2p)**