INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN
DOLJ

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
17 februarie 2018

Clasa a X-a

1. Fie $z, u, w \in \mathbb{C}$ astfel încât $z + u + w = 0$.
a) Demonstrați că $3(|z|^2 + |u|^2 + |w|^2) = |z - u|^2 + |u - w|^2 + |w - z|^2$.
b) Demonstrați că $3(|z| + |u| + |w|) \leq 2(|z - u| + |u - w| + |w - z|)$.

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel încât:

$$f\big(f(x)\big) = f(x) + x, \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Să se arate că:
a) f este injectivă și $f(0) = 0$.
b) $f^{[1]} + f^{[2]} + \ \dots + f^{[n]} = f^{[n+2]} - f^{[2]}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, cu notația: $f^{[k]} = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{de } k \text{ ori}}$, $k \in \mathbb{N}^*$.

3. a) Să se rezolve ecuația:

$$tg(arctge^{x}) + ctg(arctge^{-x}) = 2.$$

b) Să se rezolve ecuația:

$$x^{lg5} + 12^{lgx} = 13^{lgx}.$$

4. Fie $m > 0$ un număr fixat. Să se arate că:
$\frac{a}{a+mb+c} + \frac{b}{b+mc+a} + \frac{c}{c+ma+b} \geq min\left(1, \frac{3}{m+2}\right)$, oricare ar fi $a, b, c > 0$.

Notă:
- *Toate subiectele sunt obligatorii;*
- *Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;*
- *Timp de lucru: 3 ore.*

Soluții și bareme orientative
Clasa a X-a
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

1. a) $3(|z|^2+|u|^2+|w|^2)=3(z\bar{z}+u\bar{u}+w\bar{w})$ **(1p)**

$|z-u|^2+|u-w|^2+|w-z|^2=(z-u)\cdot\overline{(z-u)}+(u-w)\cdot\overline{(u-w)}+$
$+(w-z)\cdot\overline{(w-z)}=2(z\bar{z}+u\bar{u}+w\bar{w})-\bar{z}(u+w)-\bar{u}(w+z)-\bar{w}(z+u)=$
$=3(z\bar{z}+u\bar{u}+w\bar{w})$. **(3p)**

b) $3|z|=|z-u+z-w|\le|z-u|+|z-w|$,
$3|u|=|u-z+u-w|\le|u-z|+|u-w|$
$3|w|=|w-z+w-u|\le|w-z|+|w-u|$. **(2p)**

Prin adunarea celor trei inegalități obținem concluzia. **(1p)**

2. a) Fie $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, astfel încât $f(x_1)=f(x_2)$. Rezultă $f\big(f(x_1)\big)=f\big(f(x_2)\big)$, deci:
$x_1=f\big(f(x_1)\big)-f(x_1)=f\big(f(x_2)\big)-f(x_2)=x_2$, deci f este injectivă. **(2p)**

Pentru $x=0$ în relația din enunț se obține $f\big(f(0)\big)=f(0)$ și din injectivitate rezultă că $f(0)=0$. **(1p)**

b) Se aplică principiul inducției matematice. Fie
$P(n)\colon f^{[1]}+f^{[2]}+\ \dots\ +f^{[n]}=f^{[n+2]}-f^{[2]},\ n\in\mathbb{N}^*$.

I. Etapa de verificare:
$P(1)\colon f(x)=f\big(f(f(x))\big)-f\big(f(x)\big)$.
În relația din ipoteză facem substituția: $x\to f(x)$, de unde
$f\big(f(f(x))\big)=f\big(f(x)\big)+f(x)$, ceea ce demonstrează că $P(1)$ este adevărată. **(2p)**

II. Etapa de demonstrație: $P(n)\to P(n+1)$
Presupunem $P(n)$ adevărată și avem:
$P(n+1)\colon f^{[1]}+f^{[2]}+\ \dots\ +f^{[n]}+f^{[n+1]}=f^{[n+3]}-f^{[2]},\ n\in\mathbb{N}^*$.
Dar, din ipoteza de inducție
$f^{[1]}+f^{[2]}+\ \dots\ +f^{[n]}+f^{[n+1]}=f^{[n+2]}-f^{[2]}+f^{[n+1]}$,
astfel că ne rămâne să demonstrăm relația:
$f^{[n+3]}-f^{[2]}=f^{[n+2]}-f^{[2]}+f^{[n+1]}\Leftrightarrow f^{[n+3]}=f^{[n+2]}+f^{[n+1]}$,
ceea ce se obține făcând substituția $x\to f^{[n+1]}$ în relația din enunț, astfel $P(n+1)$ este adevărată. Prin urmare, conform principiul inducției matematice
$f^{[1]}+f^{[2]}+\ \dots\ +f^{[n]}=f^{[n+2]}-f^{[2]},\forall\, n\in\mathbb{N}^*$. **(2p)**

3. a) Cum $e^{-x}>0$, rezultă $arctge^{-x}=arcctge^{x}$. Ecuația devine: $2e^x=2\Leftrightarrow x=0$. **(3p)**

b) Condiția de existență $x>0$. Folosind formula $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^{lg5}=5^{lgx}$, ecuația se mai scrie: $5^{lgx}+12^{lgx}=13^{lgx}$. **(2p)**

Notând $lgx=y\Longrightarrow$
$5^y+12^y=13^y\Longrightarrow\left(\frac{5}{13}\right)^y+\left(\frac{12}{13}\right)^y=1\Longrightarrow y=2$ soluție unică deoarece funcția:
$f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(y)=\left(\frac{5}{13}\right)^y+\left(\frac{12}{13}\right)^y$ este strict descrescătoare. Deci $lgx=2\Longrightarrow x=100$. **(2p)**

4. Dacă $m\le 1$, atunci:
$a+mb+c\le a+b+c,\ b+mc+a\le a+b+c,\ c+ma+b\le a+b+c$ și avem
$\sum\frac{a}{a+mb+c}\ge\sum\frac{a}{a+b+c}=1$ (1). **(2p)**

Dacă $m>1$, notăm cu $x=a+mb+c,\ y=b+mc+a,\ z=c+ma+b$ și

$S = \sum ax$.

Varianta I.

Folosind inegalitatea: $\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \frac{x_3^2}{a_3} \geq \frac{(x_1 + x_2 + x_3)^2}{a_1 + a_2 + a_3}$, $(\forall) x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, $a_1, a_2, a_3 > 0$,

obținem:

$\sum \frac{a}{x} = \sum \frac{a^2}{ax} \geq \frac{(\sum a)^2}{S} = \frac{(\sum a)^2}{\sum a^2 + (m+1)\sum ab}$.

Varianta II.

Din convexitatea funcției x^2 rezultă că:

$\sum \frac{a}{x} = S \cdot \sum \frac{ax}{S}\left(\frac{a}{ax}\right)^2 \geq S\left(\sum \frac{ax}{S} \cdot \frac{a}{ax}\right)^2 = \frac{(\sum a)^2}{S} = \frac{(\sum a)^2}{\sum a^2 + (m+1)\sum ab}$. **(2p)**

(*)Demonstrăm: $\frac{(\sum a)^2}{\sum a^2 + (m+1)\sum ab} \geq \frac{3}{m+2} \Leftrightarrow$

$(m+2) \cdot \left(\sum a\right)^2 \geq 3 \cdot \sum a^2 + 3(m+1)\sum ab \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (m+2)\sum a^2 + 2(m+2)\sum ab \geq 3 \cdot \sum a^2 + 3(m+1)\sum ab \Leftrightarrow$ **(2p)**

$\Leftrightarrow (m-1)(\sum a^2 - \sum ab) \geq 0 \Leftrightarrow \sum a^2 \geq \sum ab$, care este adevărată,

rezultă că $\sum \frac{a}{x} \geq \frac{3}{m+2}$ (2).

Din (1), (2) se obține concluzia problemei:

$\frac{a}{a+mb+c} + \frac{b}{b+mc+a} + \frac{c}{c+ma+b} \geq min\left(1, \frac{3}{m+2}\right)$, oricare ar fi $a, b, c > 0$. **(1p)**