



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală

17 februarie 2018

Clasa a VI-a

1. a) Aflați cifra x astfel încât:

$$\overline{0,1(1x)} + \overline{0,2(2x)} + \overline{0,3(3x)} + \dots + \overline{0,9(9x)} = \frac{4923}{990}.$$

b) Fie numărul rațional $r = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{4^2} + \dots + \frac{99}{100^2}$. Arătați că $r < 6$.

2. a) Dacă $5 \cdot \overline{ab} = \overline{cd}$, arătați că \overline{abcd} este multiplu de 21.

b) Dacă $\overline{abc} = 89 \cdot d$, arătați că \overline{abcd} este multiplu de 33.

3. Determinați toate dreptunghiurile, cu lungimile laturilor exprimate în numere naturale, pentru care aria și perimetrul se exprimă prin același număr.

4. Fie unghiurile $\angle AOB$ și $\angle BOC$ adiacente complementare și $[OD]$ bisectoarea unghiului $\angle AOB$. Se știe că măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\angle BOD$ și $\angle BOC$ este de $37^\circ 30'$.

a) Arătați că $m(\angle BOC) = 4 \cdot m(\angle BOD)$.

b) Fie $E \in OB$ astfel încât $O \in (EB)$. Aflați măsura unghiului format de biseectoarea unghiului $\angle AOE$ și semidreapta $[OB]$.

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;
- Timp de lucru: 2 ore.

Soluții și bareme orientative

Clasa a VI-a

Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

1. a) Ecuația dată revine la: $\frac{11x-1}{990} + \frac{22x-2}{990} + \dots + \frac{99x-9}{990} = \frac{4923}{990}$, adică
 $11x + 22x + \dots + 99x - (1 + 2 + \dots + 9) = 4923$, (2p)

deci la $11x + 22x + \dots + 99x = 4968 \Leftrightarrow 110 + x + 220 + x + \dots + 990 + x = 4968 \Leftrightarrow$
 $9x = 4968 - 110(1 + 2 + \dots + 9) \Leftrightarrow 9x = 4968 - 4950 = 18$, deci $x = 2$. (2p)

b) Folosim $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$,

$r = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{4^2} + \dots + \frac{63}{64^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{3}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{99}{99 \cdot 100} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100}$. (1p)

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 2 \cdot \frac{1}{2}$,

$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} < 4 \cdot \frac{1}{4}$,

$\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{15} < 8 \cdot \frac{1}{8}$,

$\frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{31} < 16 \cdot \frac{1}{16}$,

$\frac{1}{32} + \frac{1}{33} + \dots + \frac{1}{63} < 32 \cdot \frac{1}{32}$,

$\frac{1}{64} + \frac{1}{65} + \dots + \frac{1}{100} < 37 \cdot \frac{1}{64} < 64 \cdot \frac{1}{64}$, (1p)

$r < 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$. (1p)

2. a) $\overline{abcd} = 100 \cdot \overline{ab} + \overline{cd} = 100 \cdot \overline{ab} + 5 \cdot \overline{ab} =$ (2p)
 $= 105 \cdot \overline{ab} = 21 \cdot 5 \cdot \overline{ab}$, de unde deducem că $21 | \overline{abcd}$. (2p)

b) $\overline{abcd} = 10 \cdot \overline{abc} + d = 89 \cdot d \cdot 10 + d =$ (2p)
 $= 891 \cdot d = 33 \cdot 27 \cdot d$, de unde rezultă $33 | \overline{abcd}$. (1p)

3. Notând lungimile laturilor cu x și y avem: $xy = 2x + 2y$ sau $x(y - 2) = 2y$, (2p)

de unde $x = \frac{2y}{y-2} = \frac{2y-4+4}{y-2} = \frac{2(y-2)}{y-2} + \frac{4}{y-2} = 2 + \frac{4}{y-2}$. (2p)

Cum x și y sunt numere naturale, trebuie ca $\frac{4}{y-2}$ să fie număr natural, adică $(y - 2) | 4$. (1p)

Obținem $y \in \{3, 4, 6\}$ și atunci avem un dreptunghi cu lungimea de 6 unități și lățimea de 3 unități și un pătrat cu latura de 4 unități. (2p)

4. a) Fie $[OM, [ON$ bisectoarele unghiurilor $\angle BOD$ respectiv $\angle BOC$. Notăm

$m(\angle BOM) = x, m(\angle BON) = y$. Rezultă $x + y = 37^\circ 30'$ și $2x + y = 45^\circ$ (2p)

Obținem $x = 7^\circ 30', y = 30^\circ$ de unde $m(\angle BOC) = 2y = 60^\circ, m(\angle BOD) = 2x = 15^\circ$ deci

$m(\angle BOC) = 4 \cdot m(\angle BOD)$ (2p)

b) Fie $[OF$ bisectoarea unghiului $\angle AOE$. $m(\angle AOE) = 150^\circ \Rightarrow m(\angle AOF) = m(\angle EOF) = 75^\circ$. (1p)

$m(\angle BOF) = m(\angle AOB) + m(\angle AOF) = 30^\circ + 75^\circ = 105^\circ$. (2p)

