OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
17 februarie 2018

Clasa a XI-a

1. Fie matricele: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.
Să se calculeze:
a) AB, BA, AC, CA;
b) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k A^{n-k}\left((-1)^{n-k} B^{n-k} - (-1)^k C^k\right)$.

2. Dacă $A, B \in M_3(\mathbb{C})$ şi $A+B=AB$, arătaţi că A este inversabilă dacă şi numai dacă B este inversabilă.

3. Calculați:
a) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p - n^p}{n!}$, unde $p \in \mathbb{N}^*$;
b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{A_{n+2m}^m}{A_{n+m}^m} \right)^n$, unde $m \in \mathbb{N}$, m fixat.

4. Fie șirul $(x_n)_{n\geq k}$, unde $n^{x_n} = n+1$.
a) Să se determine valoarea minimă $k \in \mathbb{N}$, pentru care șirul este bine definit.
b) Demonstrați că șirul $(x_n)_{n\geq k}$ este monoton și mărginit.
c) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Notă:
- *Toate subiectele sunt obligatorii;*
- *Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;*
- *Timp de lucru: 3 ore.*

Soluţii şi bareme orientative
Clasa a XI-a
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

1. a) Calculul: $AB = BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, AC = CA = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 18 \\ 9 & 15 & 15 \\ 5 & 11 & 15 \end{pmatrix}$. **(2p)**

b) Deoarece $AB = BA, AC = CA$ se poate aplica formula binomului lui Newton. Se observă că $I_3 - AB = A - C$. **(2p)**

Atunci suma cerută devine:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-AB)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^{n-k} (-C)^k = (I_3 - AB)^n - (A - C)^n = O_3.$$ **(3p)**

2. $A + B = AB \Leftrightarrow (A - I_n)(B - I_n) = I_n$ **(2p)**

$\Rightarrow \det(A - I_n) \neq 0, \det(B - I_n) \neq 0.$ (*) **(2p)**

Dar: $A + B = AB \Leftrightarrow A = (A - I_n)B$. Ţinând cont de (*) rezultă: $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det B \neq 0$. **(3p)**

3. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p - n^p}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{C_p^1 n^{p-1} + C_p^2 n^{p-2} + \ldots + 1}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{pn^{p-1}}{n!}$. **(2p)**

Fie $a_n = \frac{n^{p-1}}{n!}$. Din criteriul raportului, deoarece: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{p-1} \to 0$, limita șirului a_n este 0. În concluzie limita cerută este 0. **(1p)**

b) Numărul de factori ai numărătorului și numitorului bazei este m, care este fixat. Atunci:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{A_{n+2m}^m}{A_{n+m}^m}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2m}{n+m}\right)^n\left(\frac{n+2m-1}{n+m-1}\right)^n\cdot\ldots\cdot\left(\frac{n+m+1}{n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{m}{n+m}\right)^n\left(1+\frac{m}{n+m-1}\right)^n\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{m}{n+1}\right)^n.$$ **(2p)**

Dar $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{m}{n+m}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{m}{n+m}\right)^{\frac{n+m}{m}}\right]^{\frac{mn}{n+m}} = e^m$,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{m}{n+m-1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{m}{n+m-1}\right)^{\frac{n+m-1}{m}}\right]^{\frac{mn}{n+m-1}}=e^{m},$$

…………………………………………………………………..

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{m}{n+1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{m}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{m}}\right]^{\frac{mn}{n+1}}=e^{m}.$$ **(1p)**

Atunci limita cerută este: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{A_{n+2m}^{m}}{A_{n+m}^{m}}\right)^{n}=e^{m^2}$. **(1p)**

4. a) Pentru $n=1$ egalitatea dată este imposibilă. **(1p)**

Pentru $n\geq 2$, avem $x_n=\frac{\ln(n+1)}{\ln n}$, care are sens, deci $k_{min}=2$. **(1p)**

b) Demonstrăm că șirul $(x_n)_{n\geq k}$ este strict descrescător.

$x_n>x_{n+1}\Leftrightarrow \frac{\ln(n+1)}{\ln n}>\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}\Leftrightarrow (\ln(n+1))^2>\ln n\cdot\ln(n+2).\ (*)$ **(2p)**

Cu inegalitatea mediilor avem:

$\ln n\cdot\ln(n+2)<\left(\frac{\ln n+\ln(n+2)}{2}\right)^2=\left(\frac{\ln(n^2+2n)}{2}\right)^2<\left(\frac{\ln(n^2+2n+1)}{2}\right)^2=\left(\frac{\ln(n+1)^2}{2}\right)^2=(\ln(n+1))^2$, adică inegalitatea $(*)$. **(1p)**

Deoarece $x_n>0, (\forall)\ n\geq 2$ și $(x_n)_{n\geq k}$ este strict descrescător, deducem că (x_n) este mărginit. **(1p)**

c) Avem $\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n}=1$.

(1p)