OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
17 februarie 2018

Clasa a VIII-a

1. a) Fie numărul rațional $a=\sum_{k=1}^{20}\frac{k(k+1)}{(2k+1)^2}$. Demonstrați că $a\in\left(\frac{22}{5},5\right)$.

b) Determinați numerele întregi x și y care verifică relația:
$\sqrt{x^2+y^2+2xy-6x-6y+13}+\sqrt{x^2+4x+5}\leq 3$.

2. Determinaţi numerele naturale a şi b şi numărul natural prim p ştiind că:
$a^2+a=p^{2^b}+2$.

3. a) Să se demonstreze că:
$$(ax+by)^2+(ay-bx)^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2),$$
pentru orice numere reale a, b, x, y.

b) Fie x și y numere naturale nenule astfel încât 41 divide $(4x+5y)$. Arătați că 41 divide (x^2+y^2).

4. Pe planul triunghiului echilateral ABC cu AB=6 cm se ridică, de aceeeași parte a planului (ABC), perpendicularele $AA'\perp(ABC)$, $BB'\perp(ABC)$ și $CC'\perp(ABC)$, astfel încât $AA'=BB'=6\sqrt{3}$ cm.

a) Aflați distanța de la punctul A la planul $(A'BC)$.

b) Aflați sinusul unghiului dintre dreptele $A'B$ și $B'C$.

Notă:

- *Toate subiectele sunt obligatorii;*
- *Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;*
- *Timp de lucru: 3 ore.*

Soluţii și bareme orientative
Clasa a VIII-a
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

1. a) Oricare ar fi $k \in \{1, 2, 3, \dots, 20\}$, avem $\frac{k(k+1)}{(2k+1)^2} > \frac{22}{100} \Leftrightarrow 6k^2 + 6k > 11$,

$\forall\, k \in \mathbb{N}^*$. Prin urmare: $a = \sum_{k=1}^{20} \frac{k(k+1)}{(2k+1)^2} > \frac{22}{100} \cdot 20 = \frac{22}{5}$. (1) **(2p)**

Pentru k din aceeaşi mulţime, $\frac{k(k+1)}{(2k+1)^2} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4k^2 + 4k + 1 > 4k^2 + 4k \Leftrightarrow 1 > 0$,

afirmaţie adevărată, deci: $a = \sum_{k=1}^{20} \frac{k(k+1)}{(2k+1)^2} < \frac{1}{4} \cdot 20 = 5$. (2) **(2p)**

Din relațiile (1), (2) rezultă că $a \in \left(\frac{22}{5}, 5\right)$.

b) $\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy - 6x - 6y + 13} = \sqrt{(x + y - 3)^2 + 4} \geq \sqrt{4} = 2$

$\sqrt{x^2 + 4x + 5} = \sqrt{(x + 2)^2 + 1} \geq \sqrt{1} = 1$

$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy - 6x - 6y + 13} + \sqrt{x^2 + 4x + 5} \geq 3$ **(2p)**

Cum în enunț avem $\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy - 6x - 6y + 13} + \sqrt{x^2 + 4x + 5} \leq 3$

$\Rightarrow$ nu poate avea loc decât egalitatea $\Rightarrow (x + y - 3)^2 = 0$ și $(x + 2)^2 = 0 \Rightarrow$
$x = -2$ și $y = 5$. **(1p)**

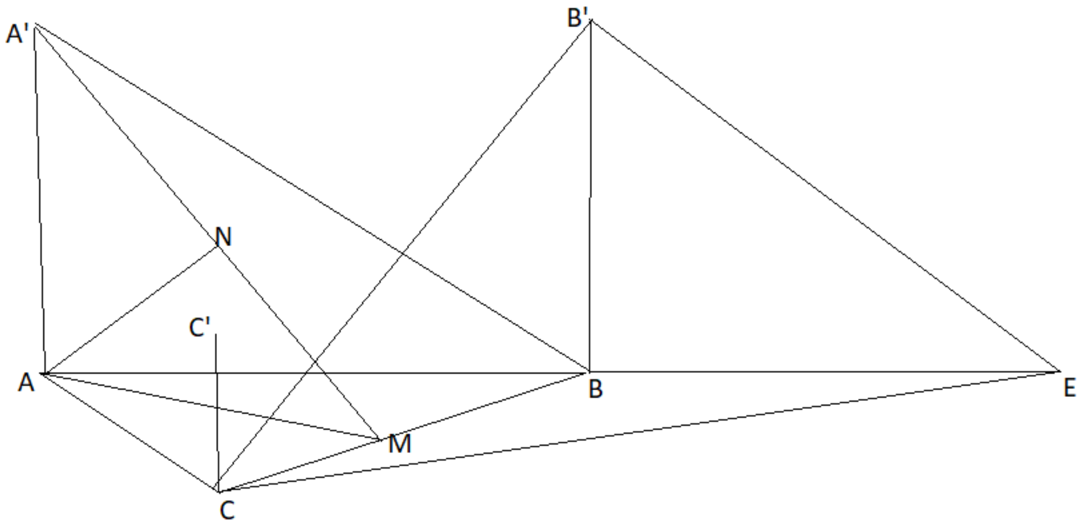
2. Deoarece numărul $a^2 + a = a \cdot (a + 1)$ este par, rezultă că numărul $p^{2^b} + 2$ este par. **(1p)**
Prin urmare $p = 2$ şi egalitatea din enunţ devine: $a^2 + a - 2 = 2^{2^b} \Leftrightarrow (a - 1) \cdot (a + 2) =$
$= 2^{2^b}$. **(2p)**
Cum membrul drept este un număr par, iar numerele $a - 1$ şi $a + 2$ au parităţi diferite, apar situaţiile:
($a - 1 = 1$ şi $a + 2 = 2^{2^b}$) sau ($a - 1 = 2^{2^b}$ şi $a + 2 = 1$). **(2p)**

- Pentru $a + 2 = 1$, nu avem soluţii. **(1p)**
- Pentru $a - 1 = 1$ şi $a + 2 = 2^{2^b}$, obţinem $2^{2^b} = 4$, deci $a = 2$ şi $b = 1$.
  Prin urmare, $(p, a, b) = (2, 2, 1)$. **(1p)**

3. a) $(ax + by)^2 = a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2$, $(ay - bx)^2 = a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2$ **(1p)**
$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2$ **(1p)**
$(ax + by)^2 + (ay - bx)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$, **(1p)**
b) Luând în egalitatea de la punctul a) a=4 și b=5 avem
$(4x + 5y)^2 + (4y - 5x)^2 = 41(x^2 + y^2)$ **(1p)**
Cum 41 divide $4x + 5y$, obținem că 41 divide $(4y - 5x)^2$, 41 este număr prim, de unde rezultă că 41 divide $4y - 5x$. **(1p)**

$4x + 5y = 41k, 4y - 5x = 41p, k, p \in N^* \Rightarrow 41(k^2 + p^2) = x^2 + y^2 \Rightarrow 41/x^2 + y^2$ **(2p)**

4.



a) Ducem $AM \perp BC$, deci M este mijlocul lui $[BC]$.
$AA' \perp (ABC), AM \perp BC \Rightarrow A'M \perp BC.$

Fie $AN \perp A'M$. Cum $A'M \perp BC, AM \perp BC \Rightarrow AN \perp (A'BC) \Rightarrow d\big(A; (A'BC)\big) = AN.$ **(1p)**

$AM = 3\sqrt{3}\,cm, A'M = 3\sqrt{15}\,cm, AN = \frac{6\sqrt{15}}{5}\ cm$. **(2p)**

b) Fie E simetricul lui A față de B și F mijlocul lui $[CE]$. Rezultă $B'E//A'B$, deci
$m\big(\sphericalangle(A'B; B'C)\big) = m\big(\sphericalangle(B'E; B'C)\big) = m\big(\sphericalangle(EB'C)\big).$ **(1p)**
$B'C = B'E = 12\ cm, CE = 6\sqrt{3}\ cm, B'F = 3\sqrt{13}cm.$ **(2p)**

$A_{\Delta B'CE} = \frac{B'F \cdot CE}{2} = \frac{B'C \cdot B'E \cdot sin(\sphericalangle EB'C)}{2} \Rightarrow sin(\sphericalangle EB'C) = \frac{\sqrt{39}}{8}$ **(1p)**