INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN
DOLJ

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
17 februarie 2018

Clasa a IX-a

1. a) Să se arate că orice mulțime A de numere naturale consecutive cu proprietatea că $\sum_{a \in A} \frac{1}{\sqrt{a}} < 2$, conține cel mult un pătrat perfect.

b) Arătați că:

$$\left\{\frac{2}{2017}\right\} + \left\{2 \cdot \frac{2}{2017}\right\} + \left\{3 \cdot \frac{2}{2017}\right\} + \cdots + \left\{2016 \cdot \frac{2}{2017}\right\} = 1008.$$

2. Șirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ și $(b_n)_{n\geq 1}$ sunt definite prin $a_1 = 2018$, $b_1 = 2017$, $a_{n+1} = 2018a_n + 2017b_n - 1$ și $b_{n+1} = 2017a_n + 2018b_n + 1$, oricare ar fi $n \geq 1$. Să se calculeze $b_{2017} - a_{2017}$.

3. În planul triunghiului ABC se consideră vectorii $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{NQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{NP}, \overrightarrow{PR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{MS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$. Se notează cu G, G' centrele de greutate ale triunghiurilor ABC şi QRS.

a) Să se arate că punctele Q, G, G' sunt coliniare.

b) Să se determine valoarea raportului $\frac{GG'}{G'Q}$.

4. Fie ABC un triunghi și $A_1 \in (BC), B_1 \in (AC), C_1 \in (AB)$, astfel încât $\frac{A_1C}{BC} = \frac{B_1A}{AC} = \frac{C_1B}{AB}$. Notăm $AA_1 \cap BB_1 = \{M\}$, $CC_1 \cap BB_1 = \{N\}$, $AA_1 \cap CC_1 = \{P\}$. Atunci cu mulțimile de segmente $\{[AM], [BN], [CP]\}$ și $\{[PA_1], [MB_1], [NC_1]\}$ se pot forma două triunghiuri asemenea.

Notă:

- *Toate subiectele sunt obligatorii;*
- *Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;*
- *Timp de lucru: 3 ore.*

Soluții și bareme orientative
Clasa a IX-a
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

1. a) Presupunem că A conține k^2 și $(k+1)^2$. Rezultă $\sum_{a\in A}\frac{1}{\sqrt{a}} > \frac{2k+2}{k+1} = 2$, ceea ce este fals.

(3p)

b) Pentru $1 \le k \le 1008 \Rightarrow 0 < \frac{2}{2017} \le k\cdot\frac{2}{2017} \le \frac{2016}{2017} < 1 \Rightarrow \left\{k\cdot\frac{2}{2017}\right\} = k\cdot\frac{2}{2017}$. **(1p)**

Pentru$1009 \le k \le 2016 \Rightarrow 1 < \frac{2018}{2017} \le k\cdot\frac{2}{2017} \le \frac{4032}{2017} < 2 \Rightarrow \left\{k\cdot\frac{2}{2017}\right\} = \frac{2k-2017}{2017}$. **(1p)**

Avem: $\left\{\frac{2}{2017}\right\} + \left\{2\cdot\frac{2}{2017}\right\} + \left\{3\cdot\frac{2}{2017}\right\} + \cdots + \left\{2016\cdot\frac{2}{2017}\right\} =$

$\frac{1}{2017}(2+4+6+\cdots 2016+1+3+5+\cdots+2015) = 1008.$ **(2p)**

2. $a_{n+1} - b_{n+1} = a_n - b_n - 2, \forall n \ge 1$ **(2p)**

Notăm $x_n = a_n - b_n$ și avem $x_{n+1} = x_n - 2, \forall n \ge 1$ **(1p)**

Adunând membru cu membru relațiile $x_2 = x_1 - 2, x_3 = x_2 - 2, \ldots,$

$x_{2017} = x_{2016} - 2$ obținem $x_{2017} = x_1 - 4032$. **(2p)**

$x_1 = 1 \Rightarrow x_{2017} = -4031 \Rightarrow b_{2017} - a_{2017} = 4031$. **(2p)**

3. Notăm cu $\vec{x}$ vectorul de poziție al unui punct X. Atunci:

$\vec{m} - \vec{a} = \frac{2}{3}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) \Rightarrow \vec{m} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b},$

$\vec{n} = \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{c}, \vec{p} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$ și $\vec{q} = \frac{1}{3}\vec{p} + \frac{2}{3}\vec{n} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c},$

$\vec{r} = \frac{1}{4}\vec{m} + \frac{3}{4}\vec{p} = \frac{11}{24}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{3}{8}\vec{c}, \vec{s} = \frac{1}{2}\vec{m} + \frac{1}{2}\vec{n} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{11}{24}\vec{b} + \frac{3}{8}\vec{c}.$ **(2p)**

Cum G, G' sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ABC și QRS, avem $\vec{g} = \frac{1}{3}\cdot\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$

și $\overrightarrow{g'} = \frac{1}{3}\cdot(\vec{q} + \vec{r} + \vec{s}) = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{19}{24}\vec{a} + \frac{19}{24}\vec{b} + \frac{34}{24}\vec{c}\right)$. **(2p)**

Atunci:

$\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{g'} - \vec{g} = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{5}{24}\vec{a} - \frac{5}{24}\vec{b} + \frac{10}{24}\vec{c}\right), \overrightarrow{G'Q} = \vec{q} - \overrightarrow{g'} = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{7}{24}\vec{a} - \frac{7}{24}\vec{b} + \frac{14}{24}\vec{c}\right)$, deci

$\overrightarrow{GG'} = \frac{5}{7}\overrightarrow{G'Q}$. Rezultă coliniaritatea punctelor Q, G, G' și $\frac{GG'}{G'Q} = \frac{5}{7}$. **(3p)**

4. Notăm: $\frac{A_1C}{A_1B} = k \Longrightarrow \overrightarrow{AA_1} = \frac{\overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{AB}}{1+k}$. **(1p)**

În triunghiul AA_1C și transversala $B - M - B_1$ rezultă $\frac{MA}{MA_1} = k(k+1)$, deci

$\overrightarrow{AM} = \frac{k}{k^2+k+1}\left(\overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{AB}\right)$. **(2p)**

În triunghiul ABA_1 și transversala $C_1 - P - C$ rezultă $\frac{PA}{PA_1} = \frac{k+1}{k^2}$, de unde

$$\overrightarrow{PA_1} = \frac{k^2}{(k+1)(k^2+k+1)}\left(\overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{AB}\right).$$

Prin urmare $\overrightarrow{PA_1} = \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AM}$ și analog se determină $\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{CP}$. **(2p)**

Rezultă $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$, $\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{NC_1}=\vec{0}$, deci cu cele două mulțimi de segmente se pot forma două triunghiuri asemenea de raport $\frac{k}{k+1}$. **(2p)**