OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
17 februarie 2018

Clasa a VII-a

1. a) Se consideră numerele:
$A = \frac{1}{100^2} + \frac{2}{99^2} + \frac{3}{98^2} + \ ... + \frac{98}{3^2} + \frac{99}{2^2}$ şi $B = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ ... + \frac{99}{100}$.
Comparaţi pe A cu B.

b) Demonstraţi că: $\frac{3}{1\cdot 2} + \frac{4}{2\cdot 3} + \frac{5}{3\cdot 4} + \ ... + \frac{n+2}{n\cdot(n+1)} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ ... + \frac{1}{n}\right) < 2.$

2. a) Să se calculeze suma $S = \frac{1}{1+\sqrt{k+1}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{2k+1}} + ... + \frac{1}{\sqrt{nk+1}+\sqrt{nk+k+1}}$
unde k şi n sunt numere naturale, $k \neq 0$.

b) Cel mai mare divizor comun al numerelor $\overline{ab2}$, $\overline{bc7}$ şi $\overline{ca8}$ este 3.
Demonstraţi că $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ este un număr iraţional.

3. Fie punctul $P \in (AB)$. Se construiesc pătratele $ADCP$ și $BFEP$ în același semiplan determinat de dreapta AB.

a) Arătați că $[AE] \equiv [BC]$.
b) Demonstraţi că $BC \perp AE$.
c) Arătaţi că punctele P, Q, E sunt coliniare, unde $\{Q\} = AF \cap BD$.

4. Fie unghiul $\sphericalangle xOy$ şi M un punct în interiorul unghiului. Să se traseze prin M o dreaptă AB, $A \in (Ox,\ B \in (Oy$, astfel încât aria triunghiului OAB să fie minimă.

Notă:

- *Toate subiectele sunt obligatorii;*
- *Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;*
- *Timp de lucru: 3 ore.*

Soluţii și bareme orientative
Clasa a VII-a
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

1. a) Observăm că:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ \dots+\frac{1}{100^2}<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ \dots+\frac{1}{99\cdot 100}=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100};$$
$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ \dots+\frac{1}{99^2}<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ \dots+\frac{1}{98\cdot 99}=1-\frac{1}{99}=\frac{98}{99};$$
....
$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3};$$
$$\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}.$$

Adunând cele 99 de inegalităţi membru cu membru obţinem $A<B$. **(3p)**

b) Relaţia din enunţ se mai poate scrie:

$\left(\frac{3}{1\cdot 2}-1\right)+\left(\frac{4}{2\cdot 3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{5}{3\cdot 4}-\frac{1}{3}\right)+\ \dots+\left(\frac{n+2}{n\cdot(n+1)}-\frac{1}{n}\right)<1.$ (*) **(1p)**

Fiecare paranteză are forma: $\frac{k+2}{k\cdot(k+1)}-\frac{1}{k}=\frac{k+2-k-1}{k\cdot(k+1)}=\frac{1}{k\cdot(k+1)}$. **(1p)**

Cu aceasta relaţia (*) se scrie: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ \dots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}<1,$ **(1p)**

care este echivalentă cu:

$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ \dots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}<1.$ **(1p)**

2. a) După raţionalizare se obţine:

$S=\frac{1}{k}\cdot\left[(\sqrt{k+1}-1)+(\sqrt{2k+1}-\sqrt{k+1})+\dots\dots+(\sqrt{nk+k+1}-\sqrt{nk+1})\right]$ **(2p)**

Finalizare $S=\frac{\sqrt{nk+k+1}-1}{k}$ **(1p)**

b) Dacă cel mai mare divizor comun al numerelor $\overline{ab2}$, $\overline{bc7}$ şi $\overline{ca8}$ este 3, atunci $a+b+2=M_3$, $b+c+7=M_3$ şi $c+a+8=M_3$. **(1p)**

De aici deducem:

$a+b=M_3+1$, (1) $b+c=M_3+2$ (2) şi $c+a=M_3+1$, (3). **(1p)**

Adunând cele trei relaţii avem:

$2(a+b+c)=M_3+1$, (4). Înmulţind relaţia (2) cu 2 şi scăzând-o din relaţia (4) obţinem $2a=M_3$, de unde $a=M_3$. Acum, din (1), (3) rezultă $b=M_3+1$ şi $c=M_3+1$. **(1p)**

Cu acestea

$a^2+b^2+c^2=M_3+M_3+1+M_3+1=M_3+2$. Cum un pătrat perfect nu poate avea forma M_3+2, rezultă că $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ este un număr iraţional. **(1p)**

3.a) $\Delta PAE\equiv\Delta PCB$ (C.C)$\Rightarrow[AE]\equiv[BC]$ **(2p)**

b) Fie $\{R\}=BC\cap AE$

$\Delta PAE\equiv\Delta PCB\Rightarrow\sphericalangle AEP\equiv\sphericalangle PBC$ **(1p)**

Cum $m(\sphericalangle AEP)+m(\sphericalangle PAE)=90^0\Longrightarrow m(\sphericalangle PBC)+m(\sphericalangle PAE)=90^0\Longrightarrow m(\sphericalangle ARB)=90^0$ adică $BC\perp AE$. **(1p)**

c) $APCD$ pătrat $\Longrightarrow AD\parallel PC$ (1)

$BFEP$ pătrat $\Longrightarrow BF\parallel PE$ (2)

P, C, E coliniare (3)

Din (1),(2),(3) rezultă $AD\parallel BF$. **(1p)**

$AD \parallel BF \Rightarrow \Delta ADQ \sim \Delta FBQ \Rightarrow \frac{AQ}{QF} = \frac{AD}{BF}$ **(1p)**

dar $\frac{AD}{BF} = \frac{AP}{PB} \Rightarrow \frac{AQ}{QF} = \frac{AP}{PB}$ şi conform reciprocei teoremei lui Thales $PQ \parallel BF$, cum $PE \parallel BF \Longrightarrow$ P, Q, E coliniare **(1p)**

4. Fie O' simetricul lui O faţă de M. Paralela prin O' la axa Ox taie pe Oy în B, iar paralela prin O' la Oy taie pe Ox în A. (**2p**)

Deoarece $OBO'A$ este paralelogram şi M este mijlocul diagonalei OO', deducem că punctul M aparţine dreptei AB. (**2p**)

Vom arăta că pentru orice $D \in (Ox$ şi $C \in Oy$, astfel încât punctul M aparţine dreptei DC, $\mathcal{A}_{[ODC]} \geq \mathcal{A}_{[OAB]}$. Într-adevăr, dacă $\{E\} = O'B \cap CD$, avem: $\mathcal{A}_{[ODC]} = \mathcal{A}_{[ODMB]} + \mathcal{A}_{[MBC]} = \mathcal{A}_{[OAB]} - \mathcal{A}_{[ADM]} + \mathcal{A}_{[MBE]} + \mathcal{A}_{[BEC]} = \mathcal{A}_{[OAB]} + \mathcal{A}_{[BEC]} \geq \mathcal{A}_{[OAB]}$, unde am folosit faptul că triunghiurile MAD şi MBE sunt congruente
(deoarece $AM = MB, \sphericalangle AMD = \sphericalangle BMC$ şi $\sphericalangle DAM = \sphericalangle EBM$).
Problema este astfel rezolvată. (**3p**)