INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN
DOLJ

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
17 februarie 2018

Clasa a V-a

1. Iulia și Ștefan și-au împărțit cele 52 de cărți de joc astfel încât fiecăruia i-au revenit câte 26 de cărți. Cărțile de la **2** la **10** valorează de la **2** la **10** puncte, asul valorează **11** puncte, valetul **12** puncte, dama **13** puncte, iar popa **14** puncte. Ștefan a observat că nu are în teanc niciun **as** și niciun **2**, dar nu deține patru cărți de aceeași valoare, iar Iulia a observat că nu are mai mult de două cărți cu aceeași valoare printre cărțile cu peste **11** puncte. Iulia face suma valorilor cărților din teancul său. Care este cea mai mică valoare pe care o poate avea această sumă? Dar cea mai mare?

2. a) Determinați ultimele 11 cifre ale numărului natural:
$n = 5^{2018} - 5^{2017} + 2 \cdot 5^{2015} + 2 \cdot 5^{2014}$.

b) Aflați toate numerele naturale de forma $\overline{abc}$ care împărțite la $\overline{bc}$ dau câtul 4 și restul egal cu $\overline{bc} - 8$.

3. Se consideră numerele $x = \underbrace{1111.......111}_{2017\,cifre} + \underbrace{2222.....222}_{2017\,cifre} + ... + \underbrace{9999.....999}_{2017\,cifre}$ şi

$y = 9 + 99 + 999 + ...\underbrace{999.....999}_{2016\,cifre} + 2017$

a) Arătaţi că numărul x este divizibil cu 3.
b) Să se afle câtul şi restul împărţirii dintre numerele x şi y.

4. Determinaţi numărul natural nenul n pentru care numărul:
$A = 1^{2014n} + 2^{2014n} + 3^{2014n} + ... + 2014^{2014n}$ este multiplu de 5.

Notă:

- *Toate subiectele sunt obligatorii;*
- *Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;*
- *Timp de lucru: 2 ore.*

Soluţii şi bareme orientative
Clasa a V-a
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

1. Iulia trebuie să aibă în teanc cei patru de **2,** cei patru **ași** și cel puțin o carte de fiecare fel. Asta înseamnă $4 + 4 + 11 = 19$ știute de Iulia. **(1p)**
Celelalte șapte cărți le alegem astfel încât valoarea lor să fie minimă: încă trei de $\mathbf{3}$, trei de $\mathbf{4}$ și un $\mathbf{5}$. Obținem suma:
$4 \cdot (2 + 11 + 3 + 4) + 2 \cdot 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 12 + 13 + 14 = \mathbf{169}$. Ștefan ar avea în acest caz doi de 5 și câte trei cărți de $6, 7, 8, 9, 10$, valet, damă, popă, ceea ce respectă condițiile problemei. **(2p)**
Pentru ca suma cărților deținute de Iulia să fie maximă, cele șapte cărți ale Iuliei pe care nu le știm trebuie să aibă valori cât mai mari. Dar Iulia are cel mult doi valeți, două dame și doi popi (*câte o carte știm deja că are*), **(1p)**
deci, pentru a obține valoarea maximă, îi vom mai da Iuliei câte una din aceste cărți. Cum Iulia deține deja toți așii, îi vom da și toți decarii (*adică încă trei pe lângă cea pe care știm deja că o are*) și doi nouari (*adică încă o carte pe lângă cea pe care știm deja că o are*). Dacă îi vom da toți nouarii, atunci Iulia va avea 28 de cărți, fals deoarece fiecăruia i-au revenit câte 26 de cărți. Astfel, Iulia va avea: câte patru de $\mathbf{2}$, de $\mathbf{10}$ și de **as**, câte doi de $\mathbf{9}$, valeți, dame și popi și câte un $\mathbf{3, 4, 5, 6, 7}$ și $\mathbf{8}$, iar Ștefan va avea câte trei de $\mathbf{3, 4, 5, 6, 7}$ și $\mathbf{8}$ și câte doi de $\mathbf{9}$, **valeți**, **dame** și **popi**, ceea ce respectă condițiile problemei. **(2p)**
Cea mai mare valoare pe care o poate avea suma valorilor cărților Iuliei este așadar:
$4 \cdot (2 + 10 + 11) + 2 \cdot (9 + 12 + 13 + 14) + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = \mathbf{221}$. **(1p)**

2. a) Avem $n = 5^{2014} \cdot (5^4 - 5^3 + 2 \cdot 5 + 2) = 5^{2014} \cdot (625 - 125 + 10 + 2) =$
$= 512 \cdot 5^{2014} = 2^9 \cdot 5^{2014} = 10^9 \cdot 5^{2005}$. **(2p)**

Pentru 5^{2005} ultimele 2 cifre sunt 25, iar ultimele 11 cifre ale lui n sunt 25000000000. **(1p)**

b) Din teorema împarțirii cu rest $\Rightarrow \overline{abc} = \overline{bc} \cdot 4 + \overline{bc} - 8$, $\overline{bc} - 8 < \overline{bc}$ **(1p)**

$\Rightarrow 100 \cdot a + \overline{bc} = 5 \cdot \overline{bc} - 8 \Rightarrow 100 \cdot a = 4 \cdot \overline{bc} - 8 \Rightarrow 25a = \overline{bc} - 2$ **(2p)**

$\Rightarrow$ a$< 4 \Rightarrow$ a$\in\{1, 2, 3\} \Rightarrow \overline{\text{abc}} \in \{127, 252, 377\}$. **(1p)**

3. a) Deoarece:
$x = \underbrace{111.....111}_{2017 cifre}(1+2+...+9) = \underbrace{111.....111}_{2017 cifre} \cdot 45$ divizibil cu 3. **(3p)**
b)Deoarece:
$y = 9+1+99+1+999+1+.....+\underbrace{999.....999}_{2016 cifre}+1+1 = \underbrace{111....11}_{2016 cifre}0+1 = \underbrace{111.....111}_{2017 cifre}$ **(2p)**
şi $x = y \cdot 45 + 0,$ deci câtul este 45 şi restul 0. **(2p)**

4. Observăm că: $u(1^{2014n}) = 1$, $u(2^{2014n}) = u(4^n)$, $u(3^{2014n}) = u(9^n)$, $u(4^{2014n}) = 6$, $u(5^{2014n}) = 5$, $u(6^{2014n}) = 6$, $u(7^{2014n}) = u(9^n)$, $u(8^{2014n}) = u(4^n)$, $u(9^{2014n}) = 1$, $u(10^{2014n}) = 0$.

$u(1^{2014n}+2^{2014n}+.....+10^{2014n})=u(9+2\cdot u(4^{n})+2\cdot u(9^{n}))=t.$ **(2p)**

Dacă $n=2k$ atunci $t=3$. **(1p)**

Dacă $n=2k+1$ atunci $t=5$. **(1p)**

Numărul A conţine 2014 termeni, deci se pot forma 201 grupe de câte 10 termeni şi mai rămân 4 termeni $2011^{2014n}, 2012^{2014n}, 2013^{2014n}, 2014^{2014n}$. **(1p)**

Pentru $n=2k$ cele 201 grupe au ultima cifră 3 şi cum

$u(2011^{2014n}+2012^{2014n}+2013^{2014n}+2014^{2014n})=4$

obţinem că ultima cifră a numărului A este 7. **(1p)**

Pentru $n=2k+1$ cele 201 grupe au ultima cifră 5, deci suma lor are ultima cifră 5 şi cum

$u(2011^{2014n}+2012^{2014n}+2013^{2014n}+2014^{2014n})=0,$

obţinem că ultima cifră a numărului A este 5.

În concluzie A este multiplu de 5 pentru orice n impar. **(1p)**