CLASA a V-a

SUBIECTUL 1

a) Calculați: $5 + 9 + 13 + \ldots + 301 - 4 - 8 - 12 - \ldots - 300$.

b) Aflaţi x din egalitatea:

$1\cdot2\cdot x + 2\cdot3\cdot x + 3\cdot4\cdot x + \ldots + 300\cdot301\cdot x = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 300^2)\cdot x + 300\cdot301$.

a) $(5-4)+(9-8)+(13-12)+\ldots+(301-300) = \underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{75\text{ termeni}} = 1\cdot75 = 75$.	**3p**
b) $(1\cdot2-1^2)\cdot x+(2\cdot3-2^2)\cdot x+(3\cdot4-3^2)\cdot x+\ldots+(300\cdot301-300^2)\cdot x = 300\cdot301$.	**2p**
$(1+2+3+\ldots+300)\cdot x = 300\cdot301$.	**1p**
$150\cdot301\cdot x = 300\cdot301 \Leftrightarrow x = 2$.	**1p**

SUBIECTUL 2

a) Arătaţi că numărul $A = 2^3 + 2^6 + 2^9 + \ldots + 2^{30}$ este divizibil cu 72.

b) Arătaţi că numărul $B = \underbrace{333\ldots3}_{n\text{ cifre}}0 + 24\cdot n$ este divizibil cu 27, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Se grupează câte doi cei 10 termeni.	**1p**
$A = 2^3(1+2^3)+\ldots+2^{27}(1+2^3) = 72(1+2^6+\ldots+2^{24})$ este divizibil cu 72.	**2p**
b) $B = 3\cdot\left(\underbrace{111\ldots1}_{n\text{ cifre}}0+8\cdot n\right)$.	**1p**
$\underbrace{111\ldots1}_{n\text{ cifre}}0+8\cdot n=\underbrace{111\ldots1}_{n\text{ cifre}}0+\underbrace{8+8+8+\ldots+8}_{n\text{ termeni}}=1\underbrace{00\ldots0}_{n\text{ cifre}}+8+1\underbrace{00\ldots0}_{n-1\text{ cifre}}+8+\ldots+10+8$	**1p**
$1\underbrace{00\ldots0}_{n-1\text{ cifre}}8+1\underbrace{00\ldots0}_{n-2\text{ cifre}}8+\ldots+108+18$, cum fiecare termen al sumei este divizibil cu 9, rezultă suma din paranteză este divizibilă cu 9.	**1p**
Și atunci B este divizibil cu 27. Sau scrie: $B = 27\cdot\left(\underbrace{111\ldots1}_{n-1\text{ cifre}}2+\underbrace{111\ldots1}_{n-2\text{ cifre}}2+\ldots+12+2\right)$ este divizibil cu 27.	**1p**

SUBIECTUL 3

Se consideră numerele: $A = \left(2^{20}+2^{21}\right)\cdot\left(3^{20}+3^{21}\right)$ și $B = \left(2^{21}-2^{20}\right)\cdot\left(3^{23}-3^{21}\right)$.

a) Arătaţi că $A + B$ este pătrat perfect.

b) Arătaţi că $A \cdot B$ este cub perfect.

a) $A = \left(2^{20}+2^{21}\right)\cdot\left(3^{20}+3^{21}\right)=2^{20}\cdot3\cdot3^{20}\cdot4=2^{21}\cdot3^{21}\cdot2=6^{21}\cdot2$. $B = \left(2^{21}-2^{20}\right)\cdot\left(3^{23}-3^{21}\right)=2^{20}\cdot3^{21}\cdot8=2^{21}\cdot3^{21}\cdot4=6^{21}\cdot4$.	**3p**
$A + B = 6^{21}\cdot6=6^{22}=\left(6^{11}\right)^2$, pătrat perfect.	**2p**
b) $A\cdot B = 6^{42}\cdot8=\left(6^{14}\cdot2\right)^3$, cub perfect.	**2p**

SUBIECTUL 4

Suma a patru numere naturale este 961. Al doilea număr este par, dacă se împarte primul număr la al doilea se obține câtul 6 și restul 4, dacă se împarte al treilea la jumătatea primului se obține câtul 5 și restul 6, iar dacă se împarte al patrulea la sfertul primului se obține câtul 6 și restul 5. Aflați cele patru numere.

Numerele se pot nota: **I:** 12x+4, **II:** 2x, **III:** 5·(6x+2)+6, **IV:** 6·(3x+1)+5.	**3p**
Se obține: 12x+4+2x+30x+10+6+18x+6+5=961, de unde: 62x+31=961; x=15.	**2p**
Cele patru numere sunt: 184; 30; 466; 281.	**2p**

SUBIECTUL 1

Se consideră mulțimile: $A = \{ 12\cdot m + 5 \mid m\in\mathbb{N} \}$ și $B = \{ 18\cdot p + 11 \mid p\in\mathbb{N} \}$.

a) Arătați că numărul $101\in A\cap B$.

b) Arătați că $10^n + 1 \in A\cap B$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

a) $101 = 12 \cdot 8 + 5\in A$ și $101 = 18 \cdot 5 + 11\in B$.	**3p**
b) $x\in A\cap B$, $x = 12\cdot m+5$, $x = 18\cdot p+11 \Leftrightarrow x+7= \mathcal{M}_{36} \Leftrightarrow x = \mathcal{M}_{36} - 7$.	**2p**
$10^n + 1 = 10^n + 8 - 7 = \mathcal{M}_{36} - 7$, deoarece $10^n + 8 = \mathcal{M}_{36}$, fiind multiplu de 4 și de 9, iar $(4, 9)=1$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.	**2p**

SUBIECTUL 2

Fie a, b numere naturale, $a > b$ și $F = \dfrac{(3a-2b)(3a+10b)}{81}$.

a) Dacă $3a - 2b = 9$, atunci $F\in\mathbb{N}$.

b) Arătați că dacă unul dintre numerele $3a - 2b$ sau $3a + 10b$ se divide cu 9, atunci $F\in\mathbb{N}$.

a) $3a - 2b = 9 \Rightarrow 2b = 3a - 9$, $a\geq 3$	**1p**
$F = \dfrac{9(3a+10b)}{81} = \dfrac{3a+10b}{9} = \dfrac{3a+15a-45}{9} = \dfrac{18a-45}{9} = 2a-5$, este număr natural, $a\geq 3$.	**2p**
b) Dacă notăm $A = 3a - 2b$ și $B = 3a + 10b$, atunci $2B + A = 2(3a + 10b) + 3a - 2b = 9a + 18b = 9(a + 2b)$.	**2p**
Relație ce arată că $A \vdots 9 \Leftrightarrow B \vdots 9$.	**1p**
Și atunci $F = \dfrac{A\cdot B}{81}$, este număr natural deoarece și A și B se divid cu 9.	**1p**
OBS: Dacă ia numai o variantă, spre exemplu $3a - 2b = 9k$ și arată $F\in\mathbb{N}$**(2p)**.	

SUBIECTUL 3

În jurul punctului O se consideră unghiurile: $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOE}$, $\widehat{EOA}$,

astfel încât: $m(\widehat{AOB}) = \dfrac{n}{n+1}\cdot m(\widehat{BOC}) = \dfrac{n}{n+2}\cdot m(\widehat{COD}) = \dfrac{n}{n+3}\cdot m(\widehat{DOE}) = \dfrac{n}{n+4}\cdot m(\widehat{EOA})$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Determinați măsurile unghiurilor pentru $n = 7$.

b) Aflaţi n, știind că unghiurile $\widehat{DOE}$ și $\widehat{EOA}$ sunt suplementare.

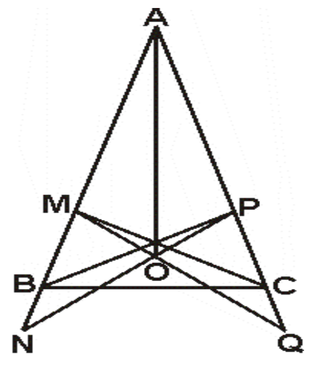
a) $m(\widehat{BOC}) = \dfrac{8}{7}\cdot m(\widehat{AOB})$, $m(\widehat{COD}) = \dfrac{9}{7}\cdot m(\widehat{AOB})$, $m(\widehat{DOE}) = \dfrac{10}{7}\cdot m(\widehat{AOB})$, $m(\widehat{EOA}) = \dfrac{11}{7}\cdot m(\widehat{AOB})$.	**1p**
Din $\dfrac{45}{7}\cdot m(\widehat{AOB}) = 360^0$, se obține $m(\widehat{AOB})=56^0$. De unde: $m(\widehat{BOC})=64^0$, $m(\widehat{COD})=72^0$, $m(\widehat{DOE})=80^0$, $m(\widehat{EOA})=88^0$.	**2p**
b) $m(\widehat{BOC}) = \dfrac{n+1}{n}\cdot m(\widehat{AOB})$, $m(\widehat{COD}) = \dfrac{n+2}{n}\cdot m(\widehat{AOB})$, $m(\widehat{DOE}) = \dfrac{n+3}{n}\cdot m(\widehat{AOB})$, $m(\widehat{EOA}) = \dfrac{n+4}{n}\cdot m(\widehat{AOB})$.	**1p**
Se obține: $\dfrac{5n+10}{n}\cdot m(\widehat{AOB}) = 360^0$ și $\dfrac{2n+7}{n}\cdot m(\widehat{AOB}) = 180^0$.	**2p**
Rezultă $5n+10 = 2(2n+7)$, de unde $n=4$.	**1p**

SUBIECTUL 4

Se consideră triunghiul isoscel ABC de vârf A. Fie $M, N\in(AB$; $P, Q\in(AC$, astfel încât $M\in(AB)$, $B\in(AN)$, $P\in(AC)$, $C\in(AQ)$, $\sphericalangle AMC \equiv \sphericalangle APB$, $\sphericalangle AMQ \equiv \sphericalangle APN$. Dacă $MQ\cap PN = \{O\}$, demonstraţi:

a) $[MQ] \equiv [PN]$.

b) [AO este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$.



a) $\Delta AMC\equiv\Delta APB$(LUU) $\Rightarrow [AM] \equiv [AP]$.	**2p**
$\Delta AMQ\equiv\Delta APN$(ULU) $\Rightarrow [MQ] \equiv [PN]$.	**1p**
b) $\Delta MNO\equiv\Delta PQO$(ULU).	**2p**
$\Delta AMO\equiv\Delta APO$(LLL sau LUL) sau $\Delta ANO\equiv\Delta AQO$(LLL sau LUL) $\Rightarrow \sphericalangle OAM \equiv \sphericalangle OAP$, rezultă [AO este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$.	**2p**

CLASA a VII-a

SUBIECTUL 1

a) **Calculaţi:** $\frac{1}{10}\cdot\left(2\frac{2}{21}+2\frac{4}{21}+2\frac{6}{21}+...+2\frac{20}{21}\right)-\frac{11}{21}$.

b) **Arătaţi că numărul** $a=\frac{1}{m}\cdot\left(2\frac{2}{n}+2\frac{4}{n}+2\frac{6}{n}+...+2\frac{2m}{n}\right)-\frac{m+1}{n}$ **are valoare constantă, pentru orice m, n$\in\mathbb{N}^*$, n > 2m.**

a) $\frac{1}{10}\cdot\left(2\frac{2}{21}+2\frac{4}{21}+2\frac{6}{21}+...+2\frac{20}{21}\right)-\frac{11}{21}=\frac{1}{10}\cdot 20+\frac{1}{10}\cdot\frac{2+4+6+...+20}{21}-\frac{11}{21}=2+\frac{11}{21}-\frac{11}{21}=2$.	**3p**
b) $\frac{1}{m}\cdot\left(2\frac{2}{n}+2\frac{4}{n}+2\frac{6}{n}+...+2\frac{2m}{n}\right)-\frac{m+1}{n}=\frac{1}{m}\cdot 2m+\frac{1}{m}\cdot\frac{2+4+6+...+2m}{n}-\frac{m+1}{n}$.	**2p**
$=2+\frac{1}{m}\cdot\frac{m(m+1)}{n}-\frac{m+1}{n}=2$ = constant.	**2p**

SUBIECTUL 2

a) **Determinați mulțimea** $A=\left\{k\in\mathbb{Z}\,\middle|\,4-\frac{8k-1}{2k+1}\in\mathbb{Z}\right\}$.

b) **Determinați mulțimea** $B=\left\{x\in\mathbb{Q}\,\middle|\,\frac{3x+2}{4x+1}\in\mathbb{Z},\ \frac{4x+3}{2x+1}\in\mathbb{Z}\right\}$.

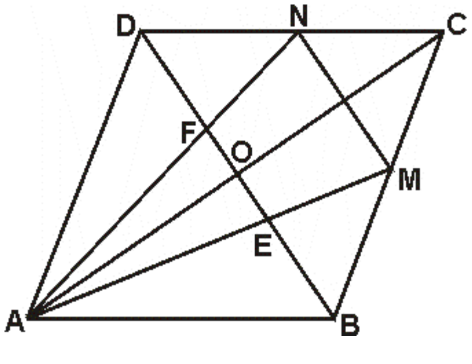
a) $4-\frac{8k-1}{2k+1}=\frac{5}{2k+1}$ sau scrie 2k+1 | 8k–1.	**1p**
2k+1 | 5 $\Rightarrow$ 2k+1$\in${±1, ±5}.	**1p**
A = {–3, –1, 0, 2}.	**1p**
b) $\frac{3x+2}{4x+1}$=k$\in\mathbb{Z}$, se exprimă x în funcție de k, $x=\frac{k-2}{3-4k}$.	**2p**
Se înlocuiește x în $\frac{4x+3}{2x+1}$ și se obține $\frac{8k-1}{2k+1}\in\mathbb{Z}$.	**1p**
k$\in${–3, –1, 0, 2} $\Rightarrow$ B= $\left\{-\frac{2}{3},\ -\frac{3}{7},\ -\frac{1}{3},\ 0\right\}$.	**1p**

SUBIECTUL 3

Fie ABCD un paralelogram, M şi N sunt mijloacele laturilor [BC], respectiv [CD].

a) **Dacă AC = 2·MN, atunci ABCD este dreptunghi.**

b) **Dacă [AM] ≡ [AN], atunci ABCD este romb.**



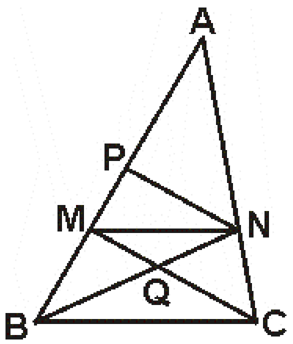
a) MN este linie mijlocie în ΔBCD, rezultă BD=2·MN.	**1p**
AC=2·MN, BD=2·MN $\Rightarrow$ AC=BD	**1p**
ABCD paralelogram și AC=BD $\Rightarrow$ ABCD este dreptunghi.	**1p**
b) Fie AC∩BD={O}, AM∩BD={E}, AN∩BD={F}. E și F sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, respectiv ADC.	**1p**
AM=AN $\Rightarrow$ $\frac{2}{3}AM=\frac{2}{3}AN$ $\Rightarrow$ AE=AF. Apoi $\frac{1}{3}OB=\frac{1}{3}OD$ $\Rightarrow$ OE=OF.	**2p**
În ΔAEF, AE=AF și OE=OF $\Rightarrow$ AO$\perp$EF, deci AC$\perp$BD $\Rightarrow$ ABCD este romb.	**1p**

SUBIECTUL 4

Fie triunghiul ABC, M, P$\in$(AB), N$\in$(AC), astfel încât MN || BC și NP || CM.

a) **Demonstrați că $AM^2 = AB \cdot AP$.**

b) **Dacă $BN \cap CM = \{Q\}$, BC = 24 cm, MN = 18 cm și aria triunghiului QBC este egală cu 48 cm^2, determinați aria triunghiului ABC.**

	**a)** MN || BC $\Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ (1).	**1p**
	NP || CM $\Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{AP}{AM}$ (2).	**1p**
	Din (1) și (2) $\Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AM} \Rightarrow AM^2 = AB \cdot AP$.	**1p**
	b) Se notează cu d(A, BC) distanța de la punctul A la dreapta BC, reprezentând înălțimea din A în triunghiul ABC și cu $\mathcal{A}_{ABC}$ aria triunghiului ABC. $BC \cdot d(Q, BC) = 2 \cdot \mathcal{A}_{QBC} \Rightarrow d(Q, BC) = 4$.	**1p**
	$\frac{d(Q,MN)}{d(Q,BC)} = \frac{MN}{BC} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4} \Rightarrow d(Q, MN) = 3 \Rightarrow$ înălțimea trapezului BCNM este 7 cm.	**1p**
	$\frac{d(A,MN)}{d(A,BC)} = \frac{MN}{BC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{d(A,BC) - d(A,MN)}{d(A,BC)} = \frac{1}{4} \Rightarrow d(A, BC) = 28$.	**1p**
	Și atunci $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{24 \cdot 28}{2} = 336$.	**1p**

VARIANTA 2(DE NOTARE PENTRU **b)**):

$\frac{\mathcal{A}_{QNC}}{\mathcal{A}_{BQC}} = \frac{QN}{QB} = \frac{MN}{BC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \mathcal{A}_{QNC} = 36 = \mathcal{A}_{QMB}$. $\frac{\mathcal{A}_{MQN}}{\mathcal{A}_{QNC}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \mathcal{A}_{MQN} = 27$. Aria trapezului = 147.	**2p**
$\frac{\mathcal{A}_{AMN}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \left(\frac{MN}{BC}\right)^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{\mathcal{A}_{ABC} - \mathcal{A}_{AMN}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{7}{16} \Rightarrow \frac{147}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{7}{16} \Rightarrow \mathcal{A}_{ABC} = 336$.	**2p**

CLASA a VIII-a

SUBIECTUL 1

a) **Arătaţi că** $\sqrt{8888^2-7777^2+1111^2}\in\mathbb{Q}$.

b) **Arătaţi că** $\sqrt{n^2-9}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, **pentru orice** $n\in\mathbb{N}$, **n>5.**

a) $\sqrt{8888^2-7777^2+1111^2}=\sqrt{1111^2\left(8^2-7^2+1\right)}=1111\sqrt{16}=4444$.	**3p**
b) Se arată că $(n-1)^2 < n^2-9 \Leftrightarrow n^2-2n+1 < n^2-9 \Leftrightarrow -2n < -10 \Leftrightarrow n > 5$(A).	**2p**
Cum $(n-1)^2 < n^2-9 < n^2$, rezultă $\sqrt{n^2-9}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, n>5.	**2p**

SUBIECTUL 2

a) **Rezolvaţi în mulțimea numerelor întregi ecuația: $2x-3xy+6y=11$.**

b) **Arătaţi că ecuația: $2x^3-3x^2y+6x = x^2+9y+3$ are o infinitate de soluții în mulțimea numerelor întregi.**

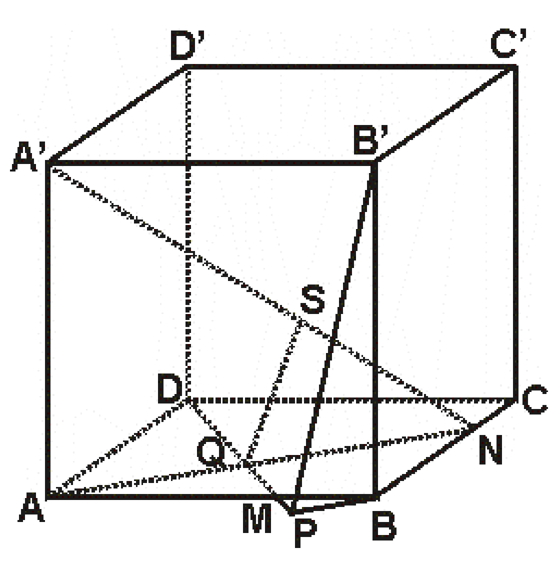
a) $2x-3xy+6y=11 \Leftrightarrow x(2-3y)-2(2-3y)=7 \Leftrightarrow (x-2)(2-3y)=7$.	**1p**
Scrie toate variantele sau $x-2\in D_7=\{\pm1;\pm7\}$.	**1p**
Scrie soluțiile sau mulțimea $S=\{(1;3);(-5;1)\}$.	**1p**
Variantă: Scrie $x=\frac{11-6y}{2-3y}\in\mathbb{Z}$**(1p)**; ajunge la $2-3y\in D_7=\{\pm1;\pm7\}$**(1p)**; scrie soluțiile**(1p)**.	
b) $2x^3-3x^2y+6x = x^2+9y+3 \Leftrightarrow 2x(x^2+3)-3y(x^2+3)-(x^2+3)=0 \Leftrightarrow (x^2+3)(2x-3y-1)=0$; $x^2+3\neq0$.	**2p**
Se obţine $2x-3y-1=0$. Luând $y=2k+1$, se obține $x=3k+2$ și atunci perechi de forma $(3k+2;2k+1)$, $k\in\mathbb{Z}$ sunt soluții ale ecuației date, deci o infinitate de soluții.	**2p**

SUBIECTUL 3

Fie cubul ABCDA'B'C'D' de muchie 20 cm. Pe laturile [AB] și [BC] se consideră punctele M, respectiv N, astfel încât $AM=BN=\frac{3}{4}AB$. Determinați:

a) **Distanța de la punctul B' la dreapta DM.**

b) **Distanța dintre dreptele A'N și DM.**



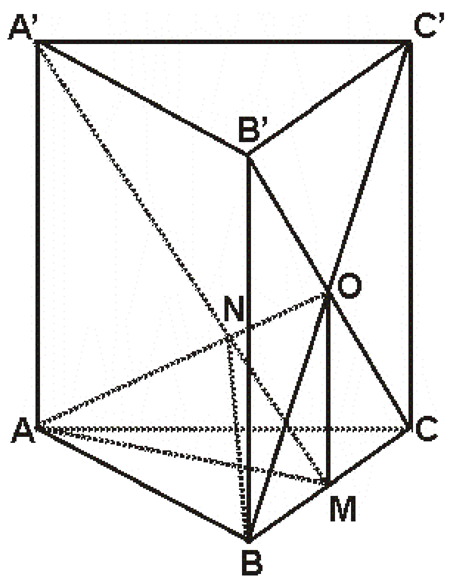
a) Calculează AM=15 cm, BM=5 cm, DM=25 cm.	**1p**
Fie $BP\perp DM \Rightarrow \Delta BMP\sim\Delta DMA \Rightarrow \frac{BP}{AD}=\frac{BM}{DM} \Rightarrow$ BP=4 cm.	**1p**
Stabilește că $B'P\perp DM \Rightarrow B'P=d(B', DM)=\sqrt{B'B^2+BP^2}=4\sqrt{26}$.	**1p**
b) Fie $DM\cap AN=\{Q\}$, atunci $\Delta DAM\equiv\Delta ABN$ $\Rightarrow m(\sphericalangle QAM)+m(\sphericalangle AMQ)=m(\sphericalangle QAM)+m(\sphericalangle ANB)=90^0 \Rightarrow$ $DM\perp AN$, cum $DM\perp AA'$, $AN\cap AA'=\{A\} \Rightarrow DM\perp(A'AN)$.	**2p**
Fie atunci $QS\perp A'N$, $S\in A'N$. Distanța este QS și se calculează din: $\Delta NQS\sim\Delta NA'A \Rightarrow \frac{QS}{AA'}=\frac{QN}{A'N}$(1). $AQ=\frac{15\cdot20}{25}=12$, QN=AN–AQ=25–12=13, $A'N=\sqrt{20^2+25^2}=5\sqrt{41}$. Din (1) dă $QS=\frac{52\sqrt{41}}{41}$.	**2p**

SUBIECTUL 4

Se consideră ABCA'B'C' o prismă triunghiulară regulată cu latura bazei AB = 12 cm. Fie M mijlocul laturii [BC], $BC' \cap B'C = \{O\}$, $BN \perp AO$, $N \in AO$, astfel încât BN = $6\sqrt{2}$ cm.

a) Demonstrați că $BC \perp AO$.

b) Determinați înălțimea prismei și arătați că punctele A', N, M sunt coliniare.

	**a)** $BC \perp OM$, $BC \perp AM$, $OM \cap AM = \{M\} \Rightarrow BC \perp (AOM)$, $AO \subset (AOM)$ $\Rightarrow BC \perp AO$.	**3p**
	b) Demonstrează că $MN \perp AO$. Calculează: MN=6, AN=$6\sqrt{2}$, AO=$9\sqrt{2}$, MO=$3\sqrt{6}$, de unde AA'=$6\sqrt{6}$.	**2p**
	Dacă alege prin asemănare, se consideră ΔAMN~ΔA'AN, deoarece ∢AMN≡∢A'AN(având același complement ∢MAN) și $\frac{MN}{AN}=\frac{AM}{AA'}\left(\frac{6}{6\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{3}}{6\sqrt{6}}\right)$.	**1p**
	Rezultă ∢ANM≡∢A'NA(90^0) $\Rightarrow$ punctele A', N, M sunt coliniare.	**1p**