Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală Dâmbovița

17 februarie 2018

« *Matematica e precisă, dar nu e reală şi e reală, dar nu e precisă* »

CLASA A IX-A

Subiectul 1. Demonstrați că, pentru orice număr natural $n \geq 5$, are loc inegalitatea:

$$\frac{n}{n+1}+\frac{n}{n+2}+\cdots+\frac{n}{2n}>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

Cristinel Mortici

Subiectul 2. Aflați numerele reale x, y, știind că $[x]+\{y\}=1{,}1$ și $[y]+\{x\}=2{,}2$.

Subiectul 3. Câți termeni (în progresie geometrică) trebuie considerați în membrul stâng al egalității următoare astfel încât aceasta să fie adevărată:

$$64+32+16+\cdots=127\frac{1}{2}\ ?$$

Subiectul 4. În ΔABC ascuțitunghic considerăm cevianele concurente AD, BE, CF astfel încât $\measuredangle ADB \equiv \measuredangle BEC \equiv \measuredangle CFA$. Demonstrați că aceste ceviane sunt înălțimile triunghiului ABC.

GM

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală Dâmbovița

17 februarie 2018

« *Matematica e precisă, dar nu e reală şi e reală, dar nu e precisă* »

CLASA A X-A

Subiectul 1. Fie $x, y \in (1, \infty)$ astfel încât $x^y = y^x$. Demonstrați că:

$$\frac{x^{y-1} + y}{y^{x-1} + x} \cdot \log_y x = 1.$$

Cristinel Mortici

Subiectul 2. Fie $z_1 \neq z_2$ numere complexe astfel încât $|z_1| = |z_2| = 1$. Demonstrați că

$$\frac{1 - z_1 z_2}{z_1 - z_2} \in \mathbb{R}.$$

Subiectul 3. Fie $a, b, c \in (1, \infty)$. Demonstrați că:

$$\frac{\log_a b}{a+b} + \frac{\log_b c}{b+c} + \frac{\log_c a}{c+a} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

Subiectul 4. Fie $ABCD$ un paralelogram. Pe laturile AB și BC, se construiesc triunghiurile echilaterale ABE și BCF (spre exteriorul, respectiv spre interiorul paralelogramului). Demonstrați că, dacă punctele D, E, F sunt coliniare, atunci $ABCD$ este romb.

GM

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală Dâmbovița

17 februarie 2018

« *Matematica e precisă, dar nu e reală şi e reală, dar nu e precisă* »

CLASA A XI-A

Subiectul 1. Fie funcțiile $f, g\colon (1,\infty) \to \mathbb{R}$ definite astfel:

$$f(x) = \sqrt{4x+1}\sin^2 x - \sqrt{x}\,, \quad g(x) = \sqrt{4x-1}\cos^2 x - \sqrt{x}.$$

Care din următoarele limite există

$$\lim_{x\to\infty} f(x)\ , \quad \lim_{x\to\infty} g(x), \quad \lim_{x\to\infty} (f(x)+g(x))\ ?$$

Cristinel Mortici

Subiectul 2. Fie șirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definite, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, prin relațiile:

$$3a_{n+1} = a_n + 10, \ \ b_n = a_n - 5, \ \ c_n = \sum_{k=0}^{n} b_k,$$

cu $a_0 = 8$. Demonstrați că $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este progresie geometrică și calculați limitele șirurilor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Subiectul 3. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$. Demonstrați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem:

$$A^n - B^n = \frac{1}{2}(7^n - 5^n)(A - B).$$

Subiectul 4. Fie $X = \begin{pmatrix} -k & k^2 - k + 1 \\ -1 & k - 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Calculați $\alpha = \det(X^{2018}) + (\operatorname{tr} X)^{2018}$,

apoi demonstrați că există $r \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $X^r = I_2$.

GM (enunț modificat)

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală Dâmbovița

17 februarie 2018

« *Matematica e precisă, dar nu e reală şi e reală, dar nu e precisă* »

CLASA A XII-A

Subiectul 1. a) Pe mulțimea $G=\left\{\sqrt[n]{n} \mid n\in\mathbb{N}, 2\le n\le 25\right\}$ se definește o operație " $*$ " astfel încât $(G,*)$ este grup. Demonstrați că acest grup este comutativ.
b) Există grupuri necomutative cu 24 de elemente? Justificați răspunsul dat.

Cristinel Mortici

Subiectul 2. Fie G un grup și $a,b\in G$ astfel încât $a^3=b^4=e$ și $ba=ab^3$. Demonstrați că:

i) $b^2a=ab^2$; ii) $b^3a=ab$; iii) $b^{-1}a^{-1}b^{-1}=a^2$.

Subiectul 3. Demonstrați că funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, definită prin formula $f(x)=x-\operatorname{arctg} x$, este strict crescătoare, pozitivă și

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{\int_0^x f(t)dt}}=\sqrt{2}.$$

Subiectul 4. Fie $m,n\ge 2$ numere naturale. Demonstrați că

$$\int_0^1 \sqrt[n]{1-x^m}\,dx=\int_0^1 \sqrt[m]{1-x^n}\,dx.$$

GM