TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a *Tehnologic*
14.12.2017

Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic toate calificările profesionale
• Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
• La toate subiectele se cer rezolvări complete. Se acordă 10 puncte din oficiu.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Fie legea de compoziție $\circ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \circ y = x + y + xy$. Să se calculeze $1 \circ (-2)$.
5p **2.** Determinați opusul elementului $\hat{5}$ în grupul $(Z_7, +)$.
5p **3** Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x * y = x - 2y + 4$. Să se rezolve ecuația $x^2 * (2x) = 0$.
5p **4.** Calculați: $\int \frac{1}{x^2-9}dx$, $x > 3$.
5p **5.** Să se determine primitiva funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 1$ care se anulează în $x = 2$.
5p **6.** Demonstrați că $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = 5 + x\ln x$ este o primitivă a funcției $g: (0, \infty) \to \mathbb{R}, g(x) = 1 + \ln x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x * y = x + y + 3$.
5p **a)** Să se arate că legea este asociativă.
5p **b)** Determinați elementul neutru al acestei legi.
5p **c)** Să se calculeze $1*2*3*...*10$.

2. Se consideră matricea $A_x = \begin{pmatrix} 2017^x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pentru $x \in R$ și mulțimea $G = \{ A_x / x \in R \}$.
5p **a)** Arătați că $I_2 \in G$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
5p **b)** Să se demonstreze *că* $A_x \cdot A_y = A_{x+y}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
5p **c)** Să se arate că orice element A_x din G este simetrizabil în raport cu înmulțirea matricelor.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \geq 1 \\ x^2 + x + 1, & x < 1 \end{cases}$
5p **a)** Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.
5p **b)** Pentru $x \geq 1$, să se determine primitiva $F: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ a funcției f, care verifică $F(2) = 7$.
5p **c)** Calculați $\int_0^2 f(x)dx$.

2. Se consideră funcția $F: \left[0, +\infty\right) \to \mathbb{R},\ F(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$.
5p **a)** Să se determine funcția $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ astfel încât funcția F să fie o primitivă a funcției f.
5p **b)** Să se demonstreze că F este descrescătoare pe $[0, +\infty)$.
5p **c)** Să se calculeze $\int \frac{1}{(x+1)(x+2)} \cdot \frac{1}{F(x)} dx$.

TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a Ș*tiinţe ale naturii*

Filiera teoretică, profilul real, specializarea Ştiinţe ale naturii
• Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
• La toate subiectele se cer rezolvări complete. Se acordă 10 puncte din oficiu.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție $x * y = 7x + 7y - 3xy - 14$. Calculați $3 * (-4)$.

5p **2.** Rezolvați în Z_4 ecuația $x^2 + x = \hat{2}$.

5p **3** Pe mulțimea ℝ definim legea de compoziție, $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$, determinați elementul neutru.

5p **4.** Calculați: $\int \frac{x^3+4x+1}{x^2} dx,\ x > 0.$

5p **5.** Calculați: $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

5p **6.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c.$ Determinați valorile numerelor reale a, b, c dacă funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = 3x^3 - 5x^2 + 6x + 8$ este o primitivă a funției *f*.

SUBIECTUL al II-lea(30 de puncte)

1. Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compoziție $x * y = xy + 3x + 3y + 6, \forall x, y \in \mathbf{R}$.

5p a) Să se demonstreze egalitatea $x * y = (x+3)(y+3) - 3, \forall x, y \in \mathbf{R}$.

5p b) Determinați două elemente $a,b \in$ Q \ Z astfel încât $a * b \in$ Z.

5p c) Rezolvați în **R** ecuatia $x * x * x = x$.

2. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \left\{X(a) = I_2 + aA \middle| a \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}\right\}$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p a) Demonstrați că $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + 3ab), \forall\, a, b \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

5p b) Demonstrați că $\left[X(a)\right]^{-1} = X\left(-\frac{a}{1+3a}\right), (\forall) a \neq -\frac{1}{3}.$

5p **c)** Să se arate că $(G, \cdot)$ este grup comutativ.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcțiile *F*: ℝ → ℝ, *F(x)= (x+1)e^x^* si *f*: ℝ → ℝ, *f(x)= (x+2)e^x^*.

5p **a)** Arătați că funcția *F* este primitiva funcției *f*.

5p **b)** Arătați că funcția F este strict crescătoare pe $(0, \infty)$.

5p **c)** Calculați $\int F(x) \cdot f(x) dx$.

2. Fie functia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-2}, x \in (-\infty, 1] \\ \ln x - 2, x \in (1, \infty) \end{cases}$

5p **a)** Aratati ca functia *f* admite primitive pe ℝ.

5p **b)** Calculati $\int_0^1 (x-2) f(x) dx$.

5p **c)** Aratati ca orice primitivă a lui *f* este convexă pe $(1, \infty)$.

Calea 13 Septembrie, nr 209,
Sector 5, 050722, București
Tel: +40 (0)21 317 36 50
Fax: +40 (0)21 317 36 54

TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a *Matematică-informatică*
14.12.2017

Filiera teoretică, profilul real, specializarea Matematică-informatică.
• Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
• La toate subiectele se cer rezolvări complete. Se acordă 10 puncte din oficiu.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Pe multimea $\mathbb{R}$ se defineste legea de compozitie „$\circ$” definita prin $x \circ y = \sqrt[3]{x^2 + 2y^2}$. Calculați (-5) $\circ$1.

5p **2.** Rezolvati in Z_5 ecuatia $x^2 + \hat{2} = \hat{1}$.

5p **3.** Determinați elementul neutru al legii de compoziție definită pe $(1, \infty)$, de forma $x * y = (x-1)^{\ln(y-1)} + 1$.

5p **4.** Să se calculeze $\int \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}} dx$.

5p **5.** Se consideră funcția $f:(1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x(\ln x + 1)}$. Arătați că orice primitivă a lui f este strict crescătoare pe $(1, \infty)$.

5p **6.** Se consideră funcțiile $f:(-1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}$ și $F:(-1,\infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = a\ln(x+1) + b\ln(x^2+1) + c\, arctgx$, unde *a*, *b*, *c* sunt parametri reali.Să se determine *a*, *b*, *c* astfel incât F să fie o primitivă a lui *f*.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră legea de compoziție „ $\circ$ ” : $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$.

5p **a)** Aratati ca $x \circ y = (x+4)(y+4) - 4, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați două elemente $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ astfel încât $a \circ b \in \mathbb{Q}$.

5p **c)** Pe mulţimea numerelor reale, rezolvaţi ecuaţia $x \circ x \circ x \circ x = x$.

2. Se consideră mulţimea $G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & \ln x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}, x > 0 \right\}$

5p **a)** Arătați că $A(x) \cdot A(y) = A(xy), \forall\, x, y > 0$.

5p **b)** Arătați că $(G, \cdot)$ este un grup.

5p **c)** Calculați $[A(2)]^n, n \in N^*$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{5}, & x \le 0 \\ x \cdot \cos x + \frac{1}{5}, & x > 0 \end{cases}$

5p **a)** Arătați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$.

5p **c)** Determinați primitiva funcției f care se anulează în $x = 0$.

2. Se consideră funcţia $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde $f_n(x) = \frac{1}{(x^2+1)^n}$, $iar\ I_n = \int f_n(x) dx$

5p **a)** Calculați I_1

5p **b)** Să se demonstreze că $(2n-2)I_n - (2n-3)I_{n-1} = \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}}$ pentru orice $n \in N^*$

5p **c)** Să se calculeze $\lim_{n \to \infty} n \cdot J_n$,unde $J_n = \int_0^1 x^n (x^2+1)^{n-1} f_n(x) dx$

Calea 13 Septembrie, nr 209,
Sector 5, 050722, București
Tel: +40 (0)21 317 36 50
Fax: +40 (0)21 317 36 54

BAREM
TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a *Tehnologic - 14.12.2017*

- **Pentru orice solutie corecta, chiar daca este diferita de cea din barem, se acorda punctajul corespunzator.**
- **Nu se acorda fractiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvaripartiale, in limitele punctajului indicat in barem.**
- **Seacorda10punctedinoficiu. Notafinalasecalculeazaprinimpartireala10apunctajuluitotal acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1	$1 \text{ o } (-2) = 1 + (-2) + 1 \cdot (-2) =$ $= -3$	3p 2p
2	$-\hat{5} = \widehat{7-5}$ $=\hat{2}$	3p 2p
3	$x^2 * (2x) = x^2 - 2(2x) + 4 => x^2 - 4x + 4 = 0$ $\Delta=0$ $x_1 = x_2 = 2$	2p 1p 2p
4	$\int \frac{1}{x^2-9} dx = \int \frac{1}{x^2-3^2} dx = \frac{1}{2\cdot 3} ln \left\|\frac{x-3}{x+3}\right\| + C$ Cum $x > 3 = \frac{1}{6} ln \frac{x-3}{x+3} + C$	3p 2p
5	$F(x) = \frac{x^3}{3} - x + C, x \in \mathbb{R}$ $F(2) = 0 \Rightarrow C = -\frac{2}{3}$ Deci$F(x) = \frac{x^3}{3} - x - \frac{2}{3}$, $x \in \mathbb{R}$	2p 2p 1p
6	f primitiva lui $g \leftrightarrow f$ derivabilăși $f'(x) = g(x), \forall x \in R$ $f'(x) = (5 + xlnx)' = 5' + x'lnx + x(lnx)'$ $=0+lnx + x\frac{1}{x} = lnx + 1 = g(x)$ de unde rezultă căf este primitivă pentru g.	2p 2p 1p

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.a	legea este asociativa daca $(x * y) * z = x * (y * z), (\forall)x, y, z \in \mathbb{R}$ $(x * y) * z = (x + y + 3) * z = x + y + z + 6$ $x * (y * z) = x * (y + z + 3) = x + y + z + 6$ $\Rightarrow$ legea este asociativa pe $\mathbb{R}$	1p 2p 2p
1.b	$\exists e \in \mathbb{R} astfel încât x * e = e * x = x, \forall x \in \mathbb{R}$ $x * e = x \leftrightarrow xe - x - e + 2 = x \leftrightarrow x = 2$ $e * x = 2 * x = 2x - 2 - x + 2 = x$	1p 3p 1p
1.c	$1 * 2 * 3 * ... * 10 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 + 3 \cdot 9 = \frac{10\cdot 11}{2} + 27 = 82$	3p 2p

2.a	$I_2 = \begin{pmatrix} 2017^0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$ $=A_0 \in G$ pentru ca $0 \in R$	3p 2p
2.b	$A_x \cdot A_y = \begin{pmatrix} 2017^x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2017^y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 2017^{x+y} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_{x+y}$pentruorice $x, y \in R$.	2p 3p
2.c	Din a) avem $I_2 = A_0$elementulneutru al legii $A_x \cdot A_{-x} = A_{-x} \cdot A_x = A_0$pentruorice $x \in R$ $A_{-x} \in G$ deoarece $-x \in R$ și atunci orice element A_x din G are simetricul $A_{-x} \in G$.	1p 2p 2p

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1.a	f admite primitive pe $\mathbb{R}$ daca f este continua pe $\mathbb{R}$ $l_s(1) = 3$; $l_d(1) = 3$; $f(1) = 3$, deci f este continua in 1 $\Rightarrow f$ continua pe $\mathbb{R}$, deci f admite primitive pe $\mathbb{R}$	1p 3p 1p
1.b	$F(x) = x^2 + x + C$, pentru $x \geq 1$ $F(2) = 7 \Rightarrow C = 1$ $F(x) = x^2 + x + 1$, pentru $x \geq 1$	2p 2p 1p
1.c	1c) $\int_0^2 (f(x))dx = \int_0^1 (x^2 + x + 1)dx + \int_1^2 (2x + 1)dx=$ $= \frac{x^3}{3}\Big\|_0^1 + \frac{x^2}{2}\Big\|_0^1 + x\|_0^1 + x^2\|_1^2 + x\|_1^2$ $= \frac{35}{6}$	2p 2p 1p
2.a	$f = F' \rightarrow$ $f(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2}$	2p 3p
2.b	$F' = \frac{-(2x+3)}{(x+1)^2(x+2)^2}$ De unde se observa ca F este descrescatoare	3p 2p
2.c	$\int \frac{1}{(x+1)(x+2)} \cdot \frac{1}{F(x)} dx = \int 1\, dx$ $\int 1dx = x + C$	3p 2p

BAREM
TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a Ș*tiinţe ale naturii - 14.12.2017*

- **Pentru orice solutie corecta, chiar daca este diferita de cea din barem, se acorda punctajul corespunzator.**
- **Nu se acorda fractiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvaripartiale, in limitele punctajului indicat in barem.**
- **Seacorda10punctedinoficiu. Notafinalasecalculeazaprinimpartireala10apunctajuluitotal acordat pentru lucrare.**

Subiectul I 30 de puncte

1	$3*(-4)=x*y=7\cdot 3+7\cdot(-4)-3\cdot 3\cdot(-4)-14=$ $=15$	2p 3p
2	$x^2\in\{\hat{0},\hat{1},\hat{0},\hat{1}\}$ $x^2+x\in\{\hat{0},\hat{2},\hat{0},\hat{2}\}$ $x\in\{\hat{1},\hat{3}\}$	2p 2p 1p
3	Definiția: $(\exists)e\in R, astfel\ incat\ pentru\ (\forall)x\in R\ avem\ x\circ e=e\circ x=x$ x∘e=x , xe+4x+4e+12=x de unde e=-3 Verificarea: -3∘x=x	1p 3p 1p
4	$\int\frac{x^3}{x^2}dx+4\int\frac{x}{x^2}dx+\int\frac{1}{x^2}dx$ $\frac{x^3}{3}+4ln\|x\|-x^{-1}+C$	2p 3p
5	$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{2}\Big\|_{-1}^{1}=\arcsin\frac{1}{2}-\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=$ $\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$	3p 2p
6	Funcția g este o primitivă a funcției f $\Rightarrow g'(x)=f(x)$ $g'(x)=9x^2-10x+6$ $g'(x)=f(x)\Rightarrow 9x^2-10x+6=ax^2+bx+c$ $a=9, b=-10, c=6$	1p 2p 1p 1p

Subiectul al II-lea30 puncte

1.a)	$(x+3)(y+3)-3=xy+3x+3y+9-3$ Finalizare	3p 2p
b)	a*b $\in\boldsymbol{Z}$ => $(a+3)(b+3)\in\boldsymbol{Z}$ $(a+3),(a+3)\in\mathbb{Q}\setminus\boldsymbol{Z}$ Finalizare	1p 2p 2p
1.c	$x*x*x=(x+3)^3-3$ $(x+3)[(x+3)^2-1]=0 => (x+3)(x+2)(x+4)=0$	1p 2p

Calea 13 Septembrie, nr 209,
Sector 5, 050722, București
Tel: +40 (0)21 317 36 50
Fax: +40 (0)21 317 36 54

	$x \in \{-4, -3, -2\}$	2p
2.a)	$X(a) \cdot X(b) = (I_2 + aA)(I_2 + bA) = I_2 + (a+b)A + abA^2$ $A^2 = 3A$ Finalizare	2p 2p 1p
b)	$[X(a)]^{-1} \cdot [X(a)] = [X(a)] \cdot [X(a)]^{-1} = I_2$ Calculdrect Finalizare	1p 3p 1p
c)	Definițiegrupcomutativ Verificareaaxiomelorcorespunzătoare grupului	1p 4p

Subiectul al III-lea 30 puncte

1.a)	$F'(x) = [(x+1)e^x]' = e^x + (x+1)e^x =$ $=(x+2)\, e^x = f(x)$ => F este primitivafuncției f	3p 2p
b)	$F'(x) = f(x) = (x+2)e^x > 0$ pentruorice $x \in (0, \infty)$ => F este strict crescătoarepe $(0, \infty)$.	3p 2p
c)	$F'(x) = f(x) \Rightarrow \int F(x) \cdot f(x)dx = \int F(x) \cdot F'(x)\, dx$ $F(x) = t, \quad F'(x)dx = dt$ Finalizare	1p 2p 2p
2.a)	$l_s(1) = -2, l_d(1) = -2, f(1) = -2, deci$ f continua in x=1 f continua pe**R**\{1} ca functiielementare, deci f continua pe**R** f admite primitive pe **R**	2p 1p 2p
b)	$\int_0^1 (x-2) f(x)dx = \int_0^1 (x-2)\frac{x+1}{x-2}dx = \int_0^1 (x+1)dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big\vert_0^1 =$ $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$	3p 2p
c)	Fie F o primitiva a lui f pe $(1,\infty)$, $F'(x)=f(x)= \ln x-2$ $F''(x) = \frac{1}{x} > 0$ F convexape $(1, \infty)$	1p 2p 2p

BAREM
TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a *Matematică-informatică - 14.12.2017*

- **Pentru orice solutie corecta, chiar daca este diferita de cea din barem, se acorda punctajul corespunzator.**
- **Nu se acorda fractiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvaripartiale, in limitele punctajului indicat in barem.**
- **Seacorda10punctedinoficiu. Notafinalasecalculeazaprinimpartireala10apunctajuluitotal acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1	$\sqrt[3]{(-5)^2+2\cdot 1^2}$ $= 3$	2p 3p
2	$x^2 \in \{\hat{0},\hat{1},\hat{4}\}$ $x^2+2 \in \{\hat{1},\hat{2},\hat{3}\}$ $x \in \{\hat{2},\hat{3}\}$	2p 2p 1p
3	$\exists E \in (1,\infty) astfelîncât x * E = E * x = x, \forall x \in (1,\infty)$ $x * E = x => (x-1)^{\ln(E-1)} + 1 = x => E = e+1$ $E * x = (e+1) * x = (e+1-1)^{\ln(x-1)} + 1 = x => E$ $= e+1\ elementneutru$	1p 2p 2p
4	$\int 1dx + \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx =$ $x + ln\left\|x+\sqrt{x^2+1}\right\| + C$	3p 2p
5	Fie F: $(1,\infty) \to \mathbb{R}$o primitivă a lui f $\Rightarrow$ F derivabilă si $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in (1,\infty)$ Pt. $x \in (1,\infty)$, $F'(x) = f(x) = \frac{1}{x(lnx+1)} > 0$, $\forall x \in (1,\infty)$ $\Rightarrow$ F strict crescătoare pe $(1,\infty)$	1p 3p 1p
6	Fie F: $(-1,\infty) \to \mathbb{R}$o primitivă a lui f $\Rightarrow$ F derivabilă si $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in (-1,\infty)$ $F'(x)=\frac{a(x^2+1)+2bx(x+1)+c(x+1)}{(x+1)(x^2+1)}$ Din $F'(x) = f(x) \Rightarrow \begin{cases} a+2b=0 \\ 2b+c=2 \\ a+c=0 \end{cases}$	1p 2p 1p

Calea 13 Septembrie, nr 209,
Sector 5, 050722, Bucureşti
Tel: +40 (0)21 317 36 50
Fax: +40 (0)21 317 36 54

	a= -1 , b= $\frac{1}{2}$, c= 1	1p

SUBIECTUL II **(30 de puncte)**

1.a	$(x+4)(y+4)-4 = xy+4x+4y+16-4$ Finalizare	3p 2p
1.b	a∘b ∈ $\mathbb{Q}$ => $(a+4)(b+4) \in \mathbb{Q}$ $(a+4),(b+4) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ Finalizare	2p 1p 2p
1.c	$x \circ x \circ x \circ x = (x+4)^4 - 4$ $(x+4)[(x+4)^3-1] = 0 => (x+4)(x+3)[(x+4)^2+x+4+1] = 0$ $x \in \{-4,-3\}$	1p 2p 2p
2.a	A(x) A(y) $= \begin{pmatrix} 1 & \ln x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ln y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 1 & \ln(x+y) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x+y \end{pmatrix}$ = A(xy) , ∀ x,y > 0 x > 0, y>0 ⇒xy > 0	2p 3p
2.b	Verificareaaxiomelorcorespunzătoare grupului	5p
2.c	Din A(x) A(y) = A(xy), folosind inducția matematică $[A(2)]^n$ = A(2· 2 · 2 · ... · 2) = A(2^n) = $\begin{pmatrix} 1 & \ln 2^n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$, n ∈ N^*	3p 2p

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1.a	$l_s(0) = \frac{1}{5}, l_d(0) = \frac{1}{5}, f(0) = \frac{1}{5}, deci$ f continua in x=0 f continua peR –{0} cafunctiielementare, deci f continua peR f admite primitive pe R	2p 1p 2p
1.b	$F'(x) = f(x)$ $f(x) > 0, \forall x \in (-\infty, 0]$. F crescătoarepe $(-\infty,0]$.	1p 2p 2p
1.c	Pentru $x \le 0 => F_1(x) = \frac{e^x}{5} + c_1$ Pentru $x > 0 => F_2(x) = x\sin x + \cos x + \frac{x}{5} + c_2$ Finalizare	1p 2p 2p

Calea 13 Septembrie, nr 209,
Sector 5, 050722, București
Tel: +40 (0)21 317 36 50
Fax: +40 (0)21 317 36 54

2.a	$$I_1=\int\frac{1}{x^2+1}dx$$ Finalizare	2p 3p
2.b	$$I_n=\int\frac{1+x^2-x^2}{(\boldsymbol{x^2+1})^n}dx=\int\frac{1}{(\boldsymbol{x^2+1})^{n-1}}dx-\int\frac{x^2}{(\boldsymbol{x^2+1})^n}dx=$$ $$=I_{n-1}-\int x\frac{x}{(\boldsymbol{x^2+1})^n}dx=I_{n-1}+\frac{x}{2(n-1)(\boldsymbol{x^2+1})^{n-1}}-\frac{1}{2(n-1)}I_{n-1}$$ $$=\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}+\frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}}=>\boldsymbol{(2n-2)I_n}-\boldsymbol{(2n-3)I_{n-1}}=\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}}$$	1p 2p 2p
2.c	$$J_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^2+1}dx$$ $$J_{n+2}+J_n=\int_0^1\frac{x^n(x^2+1)}{x^2+1}dx=\frac{1}{n+1}$$ $$\lim_{n\to\infty}n(J_{n+2}+J_n)=1$$ $$\lim_{n\to\infty}J_n=\lim_{n\to\infty}J_{n+2}\ =>\ \lim_{n\to\infty}J_n=\frac{1}{2}.$$	1p 2p 1p 1p