CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ

“ PETRU MOROŞAN-TRIDENT ”

Ediţia a XII-a, Brăila, 8-9.12.2017

BAREM

Clasa a VIII a

1. Determinaţi numerele reale a, b, c care îndeplinesc condiţia $\frac{a^2}{4030}+\frac{b^2}{4032}+\frac{c^2}{4034}+3024=a+b+c.$

Mihaela Giurcă, Brăila

***Soluţie*:**

$$\frac{a^2}{4030}+\frac{b^2}{4032}+\frac{c^2}{4034}+\frac{6048}{2}=a+b+c,(2p)\Rightarrow\frac{a^2}{4030}+\frac{b^2}{4032}+\frac{c^2}{4034}+\frac{2015}{2}+\frac{2016}{2}+\frac{2017}{2}=a+b+c,(2p)$$

$$\left(\frac{a^2}{4030}+\frac{2015^2}{4030}-a\right)+\left(\frac{b^2}{4032}+\frac{2016^2}{4032}-b\right)+\left(\frac{c^2}{4034}+\frac{2017^2}{4034}-c\right)=0,(1p)\Rightarrow\frac{(a-2015)^2}{4030}+\frac{(b-2016)^2}{4032}+$$

$$+\frac{(c-2017)^2}{4034}=0,(1p)\Rightarrow a=2015, b=2016, c=2017.(1p)$$

2. Aflaţi numerele $\overline{xy}$ care verifică relaţia: $2017^{\left(\overline{xy}\right)^2}+2017^{\left(\overline{yx}\right)^2}\le 2\cdot 2017^{\left(\overline{xx}\right)\cdot\left(\overline{yy}\right)}.$

Profesori Gheorghe Alexe şi George-Florin Şerban, Brăila

***Soluţie*:**

Aplicăm inegalitatea mediilor

$$2017^{\left(\overline{xy}\right)^2}+2017^{\left(\overline{yx}\right)^2}\ge 2\sqrt{2017^{\left(\overline{xy}\right)^2}2017^{\left(\overline{yx}\right)^2}}\,(2p)=2\cdot\sqrt{2017^{\left(\overline{xy}\right)^2+\left(\overline{yx}\right)^2}}\ge 2\cdot 2017^{\overline{xy}\cdot\overline{yx}}\,(2p)$$

$$\Rightarrow \overline{xx}\cdot\overline{yy}\ge\overline{xy}\cdot\overline{yx},(1p)\Leftrightarrow 121\cdot x\cdot y\ge 100\cdot x\cdot y+10\cdot x^2+10y^2+x\cdot y,(1p)\Leftrightarrow (x-y)^2\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=y.(1p)$$

Numerele sunt: $11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99.$

3. Se dă cubul $ABCDA'B'C'D'$. Fie M mijlocul segmentului $D'C'$ şi N mijlocul segmentului BC.

a) Aflaţi lungimea muchiei cubului, ştiind că aria triunghiului AMN este egală cu $32\sqrt{29}\ \text{cm}^2$.

b) Calculaţi sinusul unghiului dintre dreptele $A'C'$ şi AN.

c) Arătaţi că A', C şi centrul de greutate al triunghiului DBC' sunt coliniare.

***

***Soluţie*:**

a) Notăm $AB = x.$ Utilizând teorema lui Pitagora în $\triangle ABN \Rightarrow AN = \sqrt{AB^2 + BN^2} = \sqrt{x^2 + \frac{x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{5}}{2}.$

În $\triangle AD'M \Rightarrow AM = \sqrt{D'M^2 + D'A^2} = \sqrt{\frac{x^2}{4} + 2x^2} = \frac{3x}{2}.$ În $\triangle C'MN \Rightarrow MN = \sqrt{C'N^2 + C'M^2} =$
$= \sqrt{\frac{5x^2}{4} + \frac{x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{6}}{2}.$

Fie $MK \perp AN, K \in (AN); MN^2 + AN^2 > AM^2$. Notăm cu $AK = u, MK = h.$

Aplicăm teorema lui Pitagora în $\triangle AMK$ şi $\triangle MKN \Rightarrow MK^2 + AK^2 = AM^2 \Leftrightarrow h^2 + u^2 = \frac{9x^2}{4}, (1),$

$MK^2 + KN^2 = MN^2 \Rightarrow h^2 + \left(\frac{x\sqrt{5}}{2} - u\right)^2 = \frac{6x^2}{4}.$ Din (1) şi $(2) \Rightarrow \frac{9x^2}{4} + \frac{5x^2}{4} - x\sqrt{5} \cdot u = \frac{6x^2}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow u = \frac{2x}{\sqrt{5}} \Rightarrow h^2 = \frac{29x^2}{20} \Rightarrow h = \frac{x\sqrt{29}}{2\sqrt{5}} (2p) \Rightarrow A_{\triangle AMN} = \frac{AN \cdot MK}{2} = \frac{x\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{x\sqrt{29}}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{x^2\sqrt{29}}{8} = 32\sqrt{29} \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 = 256 \Rightarrow x = 16$ cm.$(1p)$

b) $AC \| AC' \Rightarrow \sphericalangle(A'C', AN) \equiv \sphericalangle(AC, AN) \equiv \sphericalangle NAC. (1p)$

$A_{\triangle NAC} = \frac{x^2}{4} = \frac{AC \cdot AN \sin \widehat{NAC}}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} = x\sqrt{2} \cdot \frac{x\sqrt{5}}{4} \cdot \sin \widehat{NAC} \Rightarrow \sin \widehat{NAC} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}. (1p)$

c) Notăm cu $AC \cap BD = \{O\}; AC \| A'C' \Rightarrow OCC'A'$ este trapez cu diagonalele OC' şi $A'C$ care se taie într-un punct T. Din teorema fundamentală a asemănării avem $\triangle TOC \sim \triangle TA'C' \Rightarrow \frac{C'T}{OT} = \frac{A'C'}{OC} = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow C'T = 2OT; (1p), (C'O)$ este mediană în $\triangle DBC' \Rightarrow T$ este centrul de greutate al $\triangle DBC' \Rightarrow$
$\Rightarrow A', T, C$ coliniare.$(1p)$