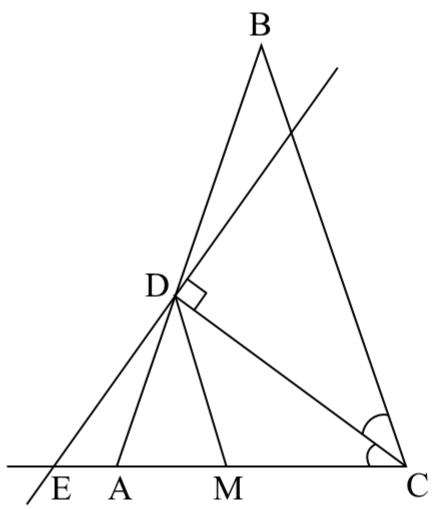
CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
“ PETRU MOROŞAN-TRIDENT ”
Ediţia a XII-a, Brăila, 8-9.12.2017
BAREM

Clasa a VII a

1. Fie triunghiul ABC isoscel cu $AB = BC, (CD$ bisectoarea $\measuredangle ACB, D \in (AB)$ cu $AD = 3$ cm. O dreaptă dusă prin *D* și perpendiculară pe *CD* intersectează *AC* în punctul *E*. Aflaţi lungimea segmentului *CE*.

Prof. Nazeli Boicescu, Brăila

***Soluţie*:**



Pp. $A \in (EC)$ (Cazul $E \in (AC)$ se studiază analog). $(1p)$

Fie *M* mijlocul lui EC. $\triangle EDC$. dreptunghic în *D* și *DM* mediana corespunzătoare ipotenuzei $(1p)$

$DM = MC = ME \Rightarrow \triangle DMC$ isoscel $\Rightarrow MDC \equiv MCD \equiv (1p)$

$\equiv DCB \Rightarrow m(DMA) = 2m(MCD) = m(ACB) = m(BAC)$

ca unghi exterior $\triangle DMC, (1p) \Rightarrow BAC \equiv DMA \Rightarrow$

$\triangle DAM$ isoscel $\Rightarrow AD = DM = 3cm$,$(2p) \Rightarrow$

$\Rightarrow EC = 2MC = 6\,cm. (1p)$

2. Aflaţi numerele prime p şi q ştiind că $p + p + p^2 + p^3 + ... + p^{10} - q = 2017.$

Prof. Gheorghe Alexe şi George-Florin Serban, Brăila

***Soluţie*:**

Se observă că p şi q au parităţi diferite. $(1p)$

1. Dacă q = par $\Rightarrow q = 2 \Rightarrow p \cdot (2 + p + .. + p^9) = 2019 = 3 \cdot 673,$ deci $p \in \{3, 673\}$. $(1p)$

Dacă $p = 3, 2 + 3 + 3^2 + ... + 3^9 = 2 + \frac{3 \cdot (3^9 - 1)}{3 - 1} = \frac{3^{10} + 1}{2} = \frac{243^2 + 1}{2} > 673$ fals. $(1p)$

Dacă $p = 673 \Rightarrow 2 + 673 + ... + 673^9 = 3,$ fals $(1p)$

2. Dacă $p = \text{par} \Rightarrow p = 2 \overset{(1p)}{\Rightarrow} 2 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{10} - q = 2017 \Rightarrow 2 + 2 \cdot (2^{10} - 1) - q = 2017, (1p) \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^{11} - q = 2017 \Rightarrow 2048 - q = 2017 \Rightarrow q = 31$. Deci $p = 2$ şi $q = 31.(1p)$

3. Fie $a_1, a_2, ..., a_{1009} \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a_1 + a_2 + ... + a_{1009} = 509545$. Arătaţi că $|a_1 - 1| + 3 \cdot |a_2 - 2| + 5 \cdot |a_3 - 3| + ... + 2017 \cdot |a_{1009} - 1009|$ este număr par.

Prof. Dan Negulescu, Brăila

***Soluţie*:**

Avem $(-1)^{|x|} = (-1)^x$, $(1p)$ oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$ şi $(-1)^{(2k+1)a} = \left[(-1)^{(2k+1)}\right]^a = (-1)^a$, oricare ar fi $a, k \in \mathbb{Z}.(1p)$

Avem

$$(-1)^N \overset{(1p)}{=} (-1)^{|a_1-1|} \cdot (-1)^{3|a_2-2|} \cdot (-1)^{5|a_3-3|} \cdot ... \cdot (-1)^{2017|a_{1009}-1009|} \overset{(1p)}{=} (-1)^{a_1-1} \cdot (-1)^{a_2-2} \cdot (-1)^{a_3-3} \cdot ... \cdot (-1)^{a_{1009}-1009} =$$
$$(-1)^{a_1+a_2+...+a_{1009}-(1+2+...+1009)} \overset{(2p)}{=} (-1)^0 = 1 \Rightarrow N \text{ par.}(1p)$$