CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ

“ PETRU MOROŞAN-TRIDENT ”

Ediţia a XII-a, Brăila, 8-9.12.2017

BAREM

Clasa a VI a

1. Unghiurile AOB, BOC, COD şi DOA sunt formate în jurul punctului O. Se ştie că $m(AOB)$ este de trei ori mai mică decât $m(BOC)$, cu 20^0 mai mică decât $m(COD)$ şi egală cu măsura suplementului unghiului DOA. Fie $(OE$ bisectoarea unghiului COD şi $(OF$ bisectoarea unghiului AOB. Arătaţi că E, O şi F nu sunt coliniare.

prof. Carmen şi Viorel Botea, Brăila

***Soluţie*:**

Notăm $m(\measuredangle AOB) = x \Rightarrow m(\measuredangle BOC) = 3x \Rightarrow m(\measuredangle AOB) = m(\measuredangle COD) - 20^0 \Rightarrow m(\measuredangle COD) = x + 20^0$;

$m(\measuredangle AOB) = 180^0 - m(\measuredangle DOA) \Rightarrow m(\measuredangle DOA) = 180^0 - x \Rightarrow x + 3x + x + 20^0 + 180^0 - x = 360^0, (2p) \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x = 160^0 \Rightarrow x = 40^0 \Rightarrow m(\measuredangle AOB) = 40^0, m(\measuredangle BOC) = 120^0, m(\measuredangle COD) = 60^0, m(\measuredangle DOA) = 140^0. (2p)$

$m(\measuredangle COE) = \dfrac{m(\measuredangle COD)}{2} = 30^0; (1p), m(\measuredangle BOF) = \dfrac{m(\measuredangle BOA)}{2} = 20^0; (1p), m(\measuredangle EOF) = m(\measuredangle COE) +$

$m(\measuredangle BOC) + m(\measuredangle BOF) = 30^0 + 120^0 + 20^0 = 170^0 \Rightarrow E, O$ şi F nu sunt coliniare. $(1p)$

2. Câte perechi de numere naturale (x, y) verifică ecuaţia $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2016}$?

Prof. Pasici Rudi, Brăila

***Soluţie* :** $(x + y) \cdot 2016 = x \cdot y \Rightarrow x = \dfrac{2016y}{y - 2016} \in \mathbb{N} \Rightarrow y - 2016 \mid 2016y$, (1) $(2p)$

Cum $y - 2016 \mid 2016y - 2016^2$, (2) din (1) şi (2), rezultă $y - 2016 \mid 2016^2$. $(2p)$

Fie d – un divizor al lui 2016^2. Din $y - 2016 = d \Rightarrow y = d + 2016$. Numărul de soluții ale ecuației este egal cu câte valori poate lua d. Cum $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \Rightarrow 2016^2 = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 7^2$, $(2p)$ deci d poate lua $(10+1) \cdot (4+1) \cdot (2+1) = 165$ de valori. În concluzie, ecuația are 165 de soluții. $(1p)$

3. Fie $n = \overline{abc} + \overline{bca} - \overline{cab}$. Determinaţi numerele $\overline{abc}$ astfel încât n să fie divizibil cu 9 şi $a > b > c$.

Prof. Narcis Gabriel Turcu, Brăila

Soluție:

$n = 91a + 109b - 89c = 90a + 108b - 90c + a + b + c = 9(10a + 12b - 10c) + a + b + c \,\vdots\, 9 \Leftrightarrow a + b + c \,\vdots\, 9, (3p)$

Cum $a, b, c \in \{1, 2, ..., 9\}, a > b > c, a + b + c \,\vdots\, 9 \Rightarrow a + b + c \in \{9, 18\}, (2p)$

Cazul 1. $a + b + c = 9 \Rightarrow (a, b, c) \in \{(6,2,1), (5,3,1), (4,3,2)\} \Rightarrow \overline{abc} \in \{432, 531, 621\}$ $(1p)$

Cazul 2. $a + b + c = 18 \Rightarrow (a, b, c) \in \{(9,8,1), (9,7,2), (9,6,3), (9,5,4), (8,7,3), (8,6,4), (7,6,5)\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{abc} \in \{765, 864, 873, 954, 963, 972, 981\}.(1p)$