CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ

“ PETRU MOROŞAN-TRIDENT ”

Ediţia a XII-a, Brăila, 8-9.12.2017

BAREM

Clasa a V a

1. Determinați numerele $\overline{abc}$, scrise în baza 10, care verifică: $\overline{abc} = \overline{ab} + \overline{bc} + 5 \cdot \overline{ca}$.

Prof. Daniela Covaci, Brăila

***Soluție*:**

$100a+10b+c=10a+b+10b+c+5(10c+a),(1p) \Rightarrow 100a+10b+c=10a+b+10b+c+50c+5a \Rightarrow$
$85a=b+50c,(1p) \Rightarrow u(b+50c)=5 \Rightarrow b=5,\ (1p), 85a=5+50c,\ 17a=1+10c \Rightarrow u(10c+1)=1 \Rightarrow u(17a)=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow a=3,(2p) \Rightarrow 51=1+10c \Rightarrow c=5$, $\overline{abc}=355.(2p)$

2. Un număr este **‘‘norocos’’** dacă este şi pătrat perfect şi cub perfect.

a) Arătaţi că $a=5^{45}-3\cdot5^{44}+14\cdot5^{42}$ este **‘‘norocos’’** .

b) Câte numere **‘‘norocoase’’** sunt cuprinse între numerele

$$x=1+3+5+7+...+49 \text{ şi } y=4+7+10+13+\ldots+202.$$

Profesori Tilincă Daniela şi Mihailă Adriana, Brăila

***Soluție*:**

1) $a=5^{45}-3\cdot5^{44}+14\cdot5^{42}=5^{42}(5^3-3\cdot5^2+14)=5^{42}\cdot64,(1p)$
$5^{42}\cdot64=(5^{14})^3\cdot4^3=(5^{14}\cdot4)^3,(1p)$
$5^{42}\cdot64=(5^{21})^2\cdot8^2=(5^{21}\cdot8)^2,(1p)$
2) $x=1+3+5+7+\ldots\ldots\ldots\ldots+49=(2\cdot0+1)+(2\cdot1+1)+(2\cdot2+1)+\ldots\ldots\ldots\ldots+(2\cdot24+1)=625,(1p)$
$y=4+7+10+13+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+202=(3\cdot1+1)+(3\cdot2+1)+(3\cdot3+1)+\ldots+(3\cdot67+1)=6901,(1p)$
Numerele norocoase sunt de forma k^6 , k număr natural,$(1p)$ $\Rightarrow 3^6=729; 4^6=4096; 5^6>6901$
$\Rightarrow$ 2 numere norocoase,$(1p)$

3. Se consideră șirul de numere naturale: $1,3,7,10,5,7,13,16,\ldots$.
a) Scrieţi următorii patru termeni ai șirului.
b) Determinaţi câte numere naturale mai mici sau egale cu 500 se regăsesc de două ori ca termeni în acest şir.

Prof. Narcis Gabriel Turcu, Brăila

***Soluție*:**

a) Termenii de pe pozițiile $4n+1$ și $4n+2, n\in\mathbb{N}^*$ sunt din 2 în 2. $(1p)$

Termenii de pe pozițiile $4n+3$ și $4n+4, n\in\mathbb{N}$ sunt din 3 în 3.Termenii sunt: $9,11,19,22$. $(1p)$

b) Termenii de pe pozițiile $4n+1$ și $4n+2, n\in\mathbb{N}^*$ sunt de forma $2m-1, m\in\mathbb{N}^*$. $(1p)$

Termenii de pe pozițiile $4n+3$ și $4n+4, n\in\mathbb{N}$ sunt de forma $3p+4,\ p\in\mathbb{N}^*$. $(1p)$

$2m-1=3p+4 \Leftrightarrow 2m=3p+5$, $(1p)$

$2m$ este număr par deci și $3p+5$ trebuie să fie par de unde rezultă că p trebuie să fie impar, fie $p=2k+1, k\in\mathbb{N}$ .Atunci $2m=3(2k+1)+5 \Leftrightarrow 2m=6k+8 \Leftrightarrow m=3k+4$. $(1p)$

Cum $2m-1\le 500 \Rightarrow 2(3k+4)-1\le 500 \Rightarrow 6k\le 493 \Rightarrow k\le 82$ .Deci sunt 83 de numere. $(1p)$