Concursul Național de Matematică „Memorial Nicoliță Sanda”
Ediția a XXI – a 18.11.2017
Subiecte clasa a VII– a

Subiectul I (30 puncte) – Pe foaia de concurs se trec numai literele corespunzătoare răspunsului corect.

Fie $a_n = \frac{1}{n(n+2017)}$, unde n este număr natural nenul.

1. Rezultatul calculului $2018 \cdot a_1 + 2019 \cdot a_2$ este :
   a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{5}{2}$ c) $\frac{7}{2}$ d) $\frac{1}{2}$ e) 2
2. Valoarea raportului $\frac{a_{1000}}{a_{3017}}$ este :
   a) 5,043 b) 5,034 c) 7,043 d) 8,034 e) 50,34
3. Rezultatul calculului $2017 \cdot (a_{2017} + a_{2\cdot 2017} + a_{3\cdot 2017} + \cdots + a_{99\cdot 2017})$ este :
   a) $\frac{3}{201700}$ b) $\frac{49}{201700}$ c) $\frac{99}{201700}$ d) 1 e) 2017
4. Cel mai mare pătrat perfect mai mic decât $\frac{1}{8\cdot a_8}$ este :
   a) 1849 b) 1894 c) 1936 d) 1396 e) 1681
5. Soluţia ecuaţiei $\frac{x}{a_{2017}} = 2017^3$ în mulţimea numerelor raţionale este :
   a) 2017 b) $\frac{2}{2017}$ c) $\frac{2017}{2}$ d) 2017^2 e) 4034
6. Rezultatul calculului $(-1)^{\frac{1}{a_1}} + (-1)^{\frac{1}{a_2}} + \ldots + (-1)^{\frac{1}{a_{10}}}$ este:
   a) 0 b) 10 c) 5 d) 1 e) 12

Subiectul al II-lea (30 puncte) – Pe foaia de concurs se trec doar rezultatele.

Se dă ABCD un romb cu latura de 10 cm şi diagonala mică [AC] congruentă cu latura rombului. Fie M simetricul punctului A faţă de BC.

1. Măsura unghiului obtuz al rombului este …………..
2. Perimetrul rombului este …….dm
3. Lungimea segmentului [CM] este ………..cm
4. Măsura unghiului DAM este ………
5. Dacă N este simetricul lui C faţă de AB, atunci perimetrul triunghiului NDM este ………cm
6. Patrulaterul ABMC este ……………..

Subiectul al III-lea (30 puncte) – Pe foaia de concurs se fac rezolvările complete.

1. Fie triunghiul isoscel ABC, cu AB = AC. Se consideră punctul E pe segmentul (BC) astfel încât $3 \cdot CE = 2 \cdot BC$. Perpendiculara în E pe BC intersectează (AB) în F, iar paralela prin E la AB intersectează (AC) în D. Demonstraţi că AF = AD.
2. Aflaţi numerele naturale prime p şi q dacă $p^q + q^p$ este număr natural prim.
3. Se consideră 2 grămezi de pietre: una de 30 de pietre, iar cealaltă de 20 de pietre. Doi elevi joacă următorul joc : la o mutare, fiecare ia oricâte pietre din una şi aceeaşi grămadă. Pierde cel care nu mai are ce lua. Cine câştigă ?

Notă: Din oficiu se acordă 10 puncte.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Timpul de lucru este de 2 ore și 30 minute.

Subiecte selectate de prof. Simona Deaconu și prof. Anca Luculescu

Barem – clasa a VII-a

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I (30 puncte)
Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte (răspuns corect), fie 0 puncte (răspuns greşit sau răspuns lipsă). Nu se acordă punctaje intermediare.

1	2	3	4	5	6
a) $\frac{3}{2}$	b)5,034	c) $\frac{99}{201700}$	c)1936	c) $\frac{2017}{2}$	b)10

Subiectul al II-lea (30 puncte)
Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte (răspuns corect), fie 0 puncte (răspuns greşit sau răspuns lipsă). Nu se acordă punctaje intermediare.

1	2	3	4	5	6
120°	4 dm	10 cm	90°	60 cm	romb

Subiectul al III-lea (30 puncte)

1. $CE = \frac{2}{3}BC$ + desen corect …………………………………………………...1p
   DE || AB şi BC = secantă ⇒ DEC ≡ ABC ……………………………...1p
   Dar ABC ≡ ACB ……………………………………………………………1p
   Rezultă că DEC ≡ DCE …………………………………………...…1p
   Deci triunghiul DEC este isoscel ……………………………………………1p
   Fie DM perpendiculară pe EC, M ∈ (EC), deci EM = MC ……………………1p
   Rezultă că BE = EM = MC ……………………………………………...…1p
   Triunghiurile BFE şi CDM sunt congruente …………………………………..1p
   Rezultă BF = CD şi cum AB = AC, găsim că AF = AD ……………….…2p
2. p, q prime ⇒ p, q ≥ 2 ……………………………………………………….1p
   $p^q + q^p$ = prim > 2 ⇒ $p^q + q^p$ = nr. nat. impar …………………….……..1p
   deci p = 2 sau q = 2 …………………………………………………….....1p
   fie p = 2, deci $2^q + q^2$ = prim
   q = nr. nat. ⇒ q ∈ {6k; 6k + 1; 6k + 2; 6k + 3; 6k + 4; 6k + 5}, k=nr.nat……...1p
   q = 6k fals ……………………………………………………………………0,5p
   $q = 6k + 1 \Rightarrow 2^q + q^2 = 2^{6k+1} + (6k + 1)^2 = 64^k \cdot 2 + M_3 + 1 =$
   $= (63 + 1)^k \cdot 2 + M_3 + 1 = M_3 + 2 + M_3 + 1 = M_3 \neq 3$ fals ………………… 1p
   $q = 6k + 2 \Rightarrow q = 2 \Rightarrow 2^q + q^2 = 8$ fals ……………………………………..0,5p
   $q = 6k + 3 \Rightarrow q = 3 \Rightarrow 2^q + q^2 = 17$ adevărat ………………………………0,5p
   q = 6k + 4 fals ………………………………………………………………….0,5p
   $q = 6k + 5 \Rightarrow 2^q + q^2 = 2^{6k+5} + (6k + 5)^2 = 64^k \cdot 32 + M_3 + 25 =$
   $= (63 + 1)^k \cdot 32 + M_3 + 1 = M_3 + 32 + M_3 + 1 = M_3 \neq 3$ fals ………………..1p
   deci q = 3
   Analog pentru q = 2, găsim p = 3 …………………………………………..1p
   Soluţie (p; q) ∈ {(2; 3); (3; 2)} ………………………………………………..1p
3. Primul jucător ia 10 pietre din grămada de 30 de pietre ………………………3p
   La fiecare mutare a celui de-al doilea jucător, primul ia acelaşi număr de pietre luate de al doilea, dar din cealaltă grămadă de pietre……………………………………………………………..3p
   Deci al doilea pierde ………………………………………………………..2p
   Primul câştigă ……………………………………………………………….2p

La subiectul al III-lea orice rezolvare corectă se punctează corespunzător etapei la care s-a ajuns.