Concursul Național de Matematică „Memorial Nicoliță Sanda”
Ediția a XXI – a 18.11.2017
Subiecte clasa a VIII– a

Subiectul I (30 puncte) – Pe foaia de concurs se trec numai literele corespunzătoare răspunsului corect.

Fie trapezul isoscel ABCD cu AB || CD (AB > CD), AC ∩ BD = {O}, AD = BC = CD = 16 cm, măsura unghiului DAB = 60°, atunci:

1. Perimetrul trapezului ABCD este:
   a) 0,8 m b) 80 m c) 48 cm d) 72 cm e) 70 cm
2. Aria trapezului ABCD este:
   a) $194\sqrt{3}$ cm^2 b) $192\sqrt{3}$ cm^2 c) $129\sqrt{3}$ cm^2 d) $128\sqrt{3}$ cm^2 e) $196\sqrt{3}$ cm^2
3. Lungimea segmentului [OC] este:
   a) $16\sqrt{3}$ cm b) $4\sqrt{3}$ cm c) $\frac{32\sqrt{3}}{3}$ cm d) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm e) $\frac{18\sqrt{3}}{5}$ cm
4. Aria triunghiului AOB este:
   a) $\frac{265\sqrt{3}}{3}$ cm^2 b) $\frac{144\sqrt{3}}{5}$ cm^2 c) $72\sqrt{3}$ cm^2 d) $172\sqrt{3}$ cm^2 e) $\frac{256\sqrt{3}}{3}$ cm^2
5. Sinusul unghiului BOC este:
   a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) 1 e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
6. Raza cercului circumscris triunghiului ABC este:
   a) 16 cm b) 16 m c) 18 cm d) 12 cm e) 18 dm

Subiectul al II-lea (30 puncte) – Pe foaia de concurs se trec doar rezultatele.

Fie $x_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$, n fiind un număr natural nenul.

1. Valoarea lui x_{15} este …….
2. Efectuând calculul, x_n este egal cu …………..
3. Rădăcina pătrată a lui x_n este ……
4. Partea întreagă a numărului $\sqrt{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}+\cdots+\sqrt{x_{2017}}}$ este ……
5. Un număr iraţional cuprins între $\frac{1}{\sqrt{x_{2018}}}$ şi $\frac{1}{\sqrt{x_{2017}}}$ este ……..
6. Soluţia ecuaţiei $\frac{1}{[x_{2017}]}\cdot y = \left\{\frac{\sqrt{x_{2018}}}{\sqrt{x_{2017}}}\right\}$, unde [a] = partea întreagă a numărului real a şi {a} = partea fracţionară a numărului real a , este ……..

Subiectul al III-lea (30 puncte) – Pe foaia de concurs se fac rezolvările complete.

1. Se consideră patrulaterul convex ABCD şi punctul M în interiorul său astfel încât unghiurile MAB şi BDC sunt congruente şi unghiurile MBC şi ABD sunt congruente.
   a) Demonstraţi că triunghiurile ABM şi DBC sunt asemenea.
   b) Demonstraţi că triunghiurile MBC şi ABD sunt asemenea.
   c) Arătaţi relaţia: $AB\cdot CD + AD\cdot BC \geq AC\cdot BD$
   d) Pentru ce fel de patrulater ABCD avem egalitate în relaţia de la punctul c)?
2. Fie $S_n = \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\dots+\sqrt{1+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}}$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$
   a) Arătaţi că $1+\frac{1}{(k-1)^2}+\frac{1}{k^2}=\frac{(k^2-k+1)^2}{(k-1)^2\cdot k^2}$, oricare ar fi k număr natural, $k \geq 3$.
   b) Calculaţi S_{2017}.
3. Doi elevi joacă un joc în modul următor: se începe cu numărul 60. La o mutare, se permite scăderea din numărul existent a oricăruia dintre divizorii săi. Pierde cel care obţine 0. Cine câştigă ?

Notă: Din oficiu se acordă 10 puncte.
Timpul de lucru este de 2 ore şi 30 minute.
Subiecte selectate de prof. Anca Luculescu şi prof. Simona Deaconu

Barem – clasa a VIII-a

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I (30 puncte)
Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte (răspuns corect), fie 0 puncte (răspuns greşit sau răspuns lipsă). Nu se acordă punctaje intermediare.

1	2	3	4	5	6
a) 0,8 m	b) $192\sqrt{3}$ cm^2	d) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm	e) $\frac{256\sqrt{3}}{3}$ cm^2	c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$	a) 16 cm

Subiectul al II-lea (30 puncte)
Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte (răspuns corect), fie 0 puncte (răspuns greşit sau răspuns lipsă). Nu se acordă punctaje intermediare.

1	2	3	4	5	6
225	n^2	n	1426	$\frac{1}{\sqrt{2017\cdot 2018}}$	2017

Subiectul al III-lea (30 puncte)

1. a) $\sphericalangle MBC \equiv \sphericalangle ABD \Rightarrow \sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle ABM$ ……………………………………………1p
   Triunghiurile ABM şi DBC sunt asemenea (2 unghiuri ≡) …………………1p
   $\Rightarrow \frac{AM}{DC}=\frac{BM}{BC}=\frac{AB}{BD}$ …………………………………………………………1p

   b) Triunghiurile MBC şi ABD sunt asemenea ($\sphericalangle MBC \equiv \sphericalangle ABD$ şi $\frac{MB}{AB}=\frac{BC}{BD}$) …..1p
   $\Rightarrow \frac{MB}{AB}=\frac{BC}{BD}=\frac{CM}{AD}$ …………………………………………………………1p

   c) MA + MC ≥ AC ………………………………………………………………1p
   $\Rightarrow \frac{AB\cdot CD}{BD}+\frac{AD\cdot BC}{BD}\geq AC \Rightarrow AB\cdot CD+AD\cdot BC\geq AC\cdot BD$ ……………..1p

   d) Egalitatea se obţine dacă MA + MC = AC, deci A, M, C = coliniare ………1p
   $\Rightarrow \sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle BDC \Rightarrow$ ABCD = patrulater inscriptibil …………………………2p

2. a) $1+\frac{1}{(k-1)^2}+\frac{1}{k^2}=\frac{(k-1)^2\cdot k^2+k^2+(k-1)^2}{(k-1)^2\cdot k^2}=$ …………………………………1p
   $=\frac{k^4-2k^3+3k^2-2k+1}{(k-1)^2\cdot k^2}=\frac{(k^2-k+1)^2}{(k-1)^2\cdot k^2}$ ………………………………………………..2p

   b) $\sqrt{1+\frac{1}{(k-1)^2}+\frac{1}{k^2}}=\left|\frac{k^2-k+1}{(k-1)\cdot k}\right|=\frac{k^2-k+1}{(k-1)\cdot k}=$ ……………………………….…1p
   $=1+\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$ ………………………………………………………….…………..2p
   $S_n=\frac{(n-2)\cdot(2n+1)}{2n}$ …………………………………………………………..2p
   $S_{2017}=\frac{8130525}{4034}$ ……………………………………………………………………2p

3. Primul jucător scade din 60 un divizor impar (se poate asta) ……………………2p
   Celui de-al doilea îi revine un număr impar, din care poate
   să scadă doar un divizor impar ……………………………………...…………2p
   Cum primul jucător are mereu un număr par ……………………………………1p
   din care el scade mereu un divizor impar (se poate asta) ………………………..2p
   rezultă că al doilea jucător ajunge la 1, deci pierde ………………………………2p
   Primul jucător câştigă ……………………………………………………………1p

La subiectul al III-lea orice rezolvare corectă se punctează corespunzător etapei la care s-a ajuns.