

1. Metoda falsei ipoteze

1.1. Introducere. În orice problemă sunt lucruri care se dau și lucruri care se cer.

Lucrurile care se dau sunt sigur adevărate și formează Ipoteza problemei.

Lucrurile care se cer nu garantăm că sunt adevărate; ne putem îndoii de justetea lor. Ele formează Concluzia problemei.

Metoda falsei ipoteze constă în a presupune că cerința problemei nu este cea corectă. Atunci formulăm noi cum credem că ar corect. Această formulare devine o nouă ipoteză.

Sarcina noastră este aceea de a arăta că ipoteza formulată de noi este falsă.

Există mai multe tipuri de probleme a căror rezolvare se face prin metoda falsei ipoteze. Cel mai bine ar fi să ilustrăm acest lucru cu câteva exemple reprezentative.

1.2. Probleme rezolvate.

Problemă. În ograda unui țăran sunt găini și porci. Numărul capetelor este 20, iar numărul picioarelor este 50. Câte găini și câți porci sunt în ogradă?

Soluție. Cerința problemei este de a afla numărul de găini și numărul de porci. Asta înseamnă că în ogradă sunt și găini și porci. Noi vom presupune că în ogradă avem numai porci sau numai găini. Trebuie să alegem una dintre situații. Să zicem că în ogradă sunt numai porci. Astfel am adăugat

ipoteza: "În ogradă sunt 20 de porci", deoarece sunt 20 de capete.

Atunci, fiind 20 de capete, numărul de picioare va fi:

$$20 \cdot 4 = 80$$

Dar în problemă se spune că sunt 50 de picioare. Ne punem întrebarea: "De unde apare diferența dintre 80 și 50, adică 30 de picioare?"

Înseamnă că în ogradă sunt și găini nu numai porci.

Cum între numărul de picioare al unei găini și numărul de picioare al unui porc avem o diferență de 2 picioare, înseamnă că la fiecare gaină am numărat 2 picioare în plus. Deci diferența de 30 de picioare vine de la numărul de găini. Dacă la fiecare găină am numărat 2 picioare în plus, atunci numărul de găini va fi :

$$30 : 2 = 15$$

Deoarece în ogradă sunt 20 de capete, iar 15 sunt capete de gaină rezultă că numărul de porci va fi:

$$20 - 15 = 5$$

În concluzie, în ogradă sunt 15 găini și 5 porci.

Pentru cei care locuiesc la bloc problema ar putea fi formulată astfel:

Problemă: Pe o scară de bloc sunt 20 de apartamente cu două și cu patru camere. În total, pe scară, sunt 50 de camere. Câte apartamente cu două camere și câte apartamente cu patru camere sunt pe scara blocului?

Rezolvarea acestei probleme se face la fel ca la problema de mai sus numai că în loc de porci și găini avem apartamente cu două sau patru camere.

Problemă. Suma a șapte numere naturale, diferite de zero, este 27. Arătați că cel puțin două dintre numere sunt egale.

Soluție. Problema cere să arătăm că între cele șapte numere, două sunt egale. Noi vom presupune că toate cele șapte numere sunt diferite. Mai mult, vom presupune că ele sunt cele mai mici șapte numere naturale consecutive, adică 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Suma acestor numere este:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$$

Dar în problemă se spune că suma celor șapte numere este 27.

Ne întrebăm: "De unde apare diferența de 1 între cele două sume?" Înseamnă că unul dintre numerele: 2, 3, 4, 5, 6 sau 7 trebuie să fie mai mic cu 1. Dacă 2 ar fi cu 1 mai mic el ar deveni 1. Dar noi mai aveam un 1, deci două dintre numere ar fi egale. Dacă 3 ar fi mai mic cu 1 el ar deveni 2. Dar noi mai avem un 2, deci iarăși am avea două numere egale. Același lucru s-ar întâmpla și atunci când 4, 5, 6 sau 7 ar fi mai mic cu 1. În concluzie, pentru ca suma să fie 27 trebuie să avem două numere egale.

Problemă. Într-o urnă avem 7 bile albe și 9 bile roșii. Care este cel mai mic număr de bile pe care trebuie să îl extragem din urnă, fără a ne uita la ele, pentru a fi siguri că am scos o bilă albă?

Soluție. De această dată, falsa ipoteză înseamnă să ne gândim la cea mai nefavorabilă situație care se poate întâmpla.

În problema noastră trebuie să scoatem din urnă o bilă albă. În urnă există bile și de altă culoare decât albă. Atunci situația cea mai nefavorabilă înseamnă să scoatem bile de orice culoare, dar nu de culoare albă.

În acest fel vom scoate mai întâi cele 9 bile negre. După cele 9 extrageri în urnă au rămas numai bile albe.

Asta înseamnă că la următoarea extragere voi avea sigur o bila albă.

4

În concluzie, numărul minim de extrageri, pentru a fi siguri că am scos o bilă albă, este 10.

1.3. Probleme propuse. Problemele au fost selectate din "Gazeta Matematică, seria B", publicație a Societății de Științe Matematice din România.

P 1. Elena a cumpărat 10 caiete, unele cu 2 lei bucata, altele cu 4 lei bucata. Pentru toate caietele a plătit 26 de lei. Câte caiete de doi lei bucata și câte caiete de 4 lei bucata a cumpărat Elena?

P 2. Într-o cutie sunt 5 bile albe și 7 bile roșii. Câte bile trebuie să scoatem, fără a le privi, pentru a fi siguri că am scos o bilă albă? Justificați răspunsul dat.

P 3. Suma a patru numere naturale este 2009. Arătați că cel puțin unul dintre ele este mai mare sau egal cu 503.

P 4. Într-un coș sunt 20 de ouă roșii, 15 ouă - verzi și 17 ouă albastre. Câte ouă trebuie să scoatem din coș, fără a le privi, pentru a fi siguri că am scos un ou albastru?

P 5. Un gospodar are în curte găini și iepuri, în total 30 de capete și 84 de picioare. Săptămânal pentru hrana unei păsări sunt folosite, în medie, 500 g de graunțe, iar pentru hrana unui iepure de 4 ori mai mult. Kilogramul de graunțe costă 4 lei. Cât plătește gospodarul pe graunțele consumate de animale în 4 săptămâni?

P 6. În parcul Herăstrău s-a organizat un concurs pentru preșcolari, unde fiecare dintre cei 32 de participanți a avut trotineta sau tricicleta sa, în total fiind 78 de roți. Taxa de participare pentru o tricicletă a fost de 2 lei, iar pentru o bicicletă de 3 lei. Din suma colectată s-au oferit premii învingătorilor în valoare de 24 lei și s-au cumpărat sucuri naturale pentru participanți la prețul de 2 lei cutia. Câte cutii cu suc au fost cumpărate?

P 7. Un test conține 25 de întrebări. Pentru un răspuns corect se acordă 6 puncte, pentru unul greșit 0 puncte iar dacă la o întrebare nu se indică niciun răspuns, se acordă 2 puncte. Care este numărul minim de întrebări la care trebuie să răspundă corect un elev, dacă pentru a trece testul trebuie să obțină cel puțin 100 de puncte?

P 8. O vilă turistică are apartamente cu 3 și 4 camere. Știind că în ușa de la intrare a fiecărui apartament se află câte două chei iar numărul apartamentelor și al cheilor la un loc este 39, aflați câte apartamente cu 3 camere sunt în vilă.

P 9. Putem așeza numerele 1, 2, 3, ..., 9, 10 pe un cerc, astfel încât suma oricăror trei numere alăturate să fie impară?

P 10. Într-un dulap sunt 7 perechi de mănuși albe și 5 perechi de mănuși negre. Câte mănuși trebuie să scoatem, fără a le privi, pentru a fi siguri că am scos o pereche?

P 11. Într-o urnă sunt 15 bile roșii, 10 bile galbene și 13 bile albastre. Fără a ne uita în urnă, care este numărul

minim de bile pe care trebuie să le extragem pentru a fi siguri că am luat cel puțin 2 bile roșii?

P 12. Andrei a cumpărat 26 de caiete și pixuri, plătind în total 110 de lei. Dacă un caiet costă 3 lei și un pix costă 5 lei, aflați câte caiete și câte pixuri a cumpărat.

P 13. Sensorii unei nave spațiale terestre descoperă la bordul unei nave de proveniență necunoscută 23 de extraterestri, fiecare cu câte 4 sau 6 picioare. Dacă în navă sunt 100 de picioare, câți extraterestrii au 4 picioare?

P 14. Suma a 10 numere naturale nenule, diferite este 108. Arătați că printre ele se află cel puțin două numere impare.

P 15. Suma a opt numere naturale diferite este mai mică decât 36. Aflați produsul numerelor.

P 16. Pentru o grădiniță s-au cumpărat păpuși blonde de 20 lei bucata, brunete de 30 lei bucata și roșcate de 50 lei bucata, plătindu-se în total suma de 5 400 lei. Păpuși brunete s-au cumpărat cu 10 mai puține decât cele roșcate. Știind că în total s-au cumpărat 155 de păpuși, să se afle câte păpuși sunt de fiecare fel?

