INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEȚULUI IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICA APLICATA
"ADOLF HAIMOVICI"

Etapa locala, 24 ianuarie 2009

CLASA a IX-a - M2

1.a)
Stabiliti valoarea de adevar pentru fiecare propozitie,justificand alegerea facuta.
p:"Media aritmetica a numerelor

$x=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2008}+\frac{1}{2009}$ *si* $y=1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+...+\frac{2007}{2008}+\frac{2008}{2009}$ *este numar par."*

q:" $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{35}}+\frac{\sqrt{9}-\sqrt{7}}{\sqrt{63}}\in Q-Z$ "

r:" $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{2007\cdot 2008}+\frac{1}{2008\cdot 2009}<0{,}91$ ".

1.b)
Fie $a,b,c>0$. *Demonstrati ca inegalitatea*

$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\geq\frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$ *este adevarata pentru orice numere reale* x,y,z.

(20 puncte)

2.Fie sirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1=1,\ a_{n+1}-2a_n=1,\ unde\ n\in N^{\bullet}$.

a)Aratati ca sirul $(b_n)_{n\geq 1}, b_n=1+a_n$ este o progresie geometrica.

b)Aflati termenul general al sirului $(c_n)_{n\geq 1}$, stiind ca pentru orice numar n ,natural si nenul este adevarata relatia $c_1+c_2+...+c_n=a_n$.

(20 puncte)

3.Fie functia $f:R\to R, f(x)=(m+2)\cdot x+5\cdot m-2$.

a)Determinati $m\in R$ astfel incat punctul cu ordonata m^2+4 sa apartina graficului functiei f si axei OY.

b)Pentru m=-1 verificati daca punctele A(2;-4), B(4,(3);-2,(6)) sunt pe graficul functiei f.

(20 puncte)

4. Intr-un turn inalt de 2,04 m se construieste o scara ale carei trepte au inaltimile intr-o progresie aritmetica cu ratia de 1cm. Daca prima treapta are 4cm, cate trepte pot fi construite si care este inaltimea ultimei trepte?

(30 puncte)

Nota :Toate subiectele sunt obligatorii.
Din oficiu se acorda 10 puncte.
Timp de lucru:3 ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEȚULUI IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICA APLICATA
"ADOLF HAIMOVICI"

Etapa locala, 24 ianuarie 2009

CLASA a X-a - M2

Subiectul I – (20 p)

Se consideră expresia $E(x) = x^{\frac{1}{3}} : \left(x^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{6}} \right)^3 \cdot \left(x^{\frac{4}{3}} \right)^{\frac{1}{2}}$.

a) Să se aducă expresia $E(x)$ la forma cea mai simplă.
b) Să se calculeze $E(-\sqrt{2009})$.

Subiectul II – (20 p)

Se dau numerele complexe $z_1 = \dfrac{2 - i\sqrt{3}}{2 + i\sqrt{3}}$ şi $z_2 = 7 + 4i\sqrt{3}$.

a) Să se determine forma algebrică a numărului z_1.
b) Să se calculeze $3z_1z_2 - 2(z_1 + z_2)$.

Subiectul III – (20 p)

Să se rezolve ecuațiile:
a) $\log_{0,5}(x+3) + \log_{0,5}(2-x) = \log_{0,5}(x^2 - x - 2)$
b) $\sqrt[3]{1 + \sqrt{6x+1}} = 2$.

Subiectul IV – (30 p)

Varsta unui copil va fi peste trei ani un patrat perfect iar acum trei ani varsta lui era radacina acelui patrat. Ce varsta are acum copilul?

Nota: Timp de lucru 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA LOCALĂ – 24 ianuarie 2009

CLASA a XI-a - M2

I. 1) Să se rezove ecuația matriceală:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 12 & -6 & -9 \end{pmatrix}, X \in M_{m,n}(R)$$

2) a) Orice matrice $A \in M_2(R)$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ verifică egalitatea:

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = O_2, (*).$$

b) Calculați A^3 şi A^4, unde $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ utilizând relația $(*)$ de la punctual a).

(20 puncte)

II. 1) Fie $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^x \end{pmatrix}, x \in R$

a) Arătați că $A(x)A(y) = A(x+y), \forall x, y \in R$

b) Să se determine $(A(2))^n$.

2) a) Să se calculeze: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3^x + 4^x - 2}{x}$.

b) Să se determine constantele reale a şi b pentru care are loc egalitatea:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x + 2} - ax \right) = 3 + b.$$

(20 puncte)

III. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1 + \sin 3x)}{\sin 5x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \ldots \cos nx}{x^2}$

(20 puncte)

IV. O firma particulara investeste suma de 25000$ la banca in trei conturi ce ofera dobanzi de 6%, 8% respectiv 9%. Datorita factorului de risc, firma doreste sa investeasca in contul cu 6% dobanda, de doua ori mai mult decat in cel cu 9%. Daca se doreste castigarea sumei de 1850$ pe an, cat ar trebui investit in fiecare cont?

Nota: Timp de lucru 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEȚULUI IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI "

Etapa localã , 24 ianuarie 2009

CLASA a XII a – M2

1. Fie mulțimea $G = (2,\infty)$ şi legea de compoziție $x * y = xy - 2x + my + 6$, pentru orice $x, y \in R$.
a) Gãsiți $m \in R$ astfel încât legea data sã fie comutativã .
b) Pentru $m = -2$, sã se demonstreze cã $(G,*)$ este grup abelian .
c) Sã se determine $a,b \in R$ pentru care funcția $f : R_+^* \to G$, $f(x) = ax + b$ sã fie izomorfism de la $(R_+^*,\cdot)$ la $(G,*)$.
(20 puncte)

2. Se dã funcția $f:(0,\infty) \to R$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{6}{x^2-4} + \dfrac{1}{x}; & daca \quad x < 1 \\ \dfrac{3}{x^2} + 2\sqrt{x} - 6; & daca \quad x \geq 1 \end{cases}$.

Sã se demonstreze cã funcția admite primitive pe $(0,\infty)$ şi sã se determine primitiva al cãrei grafic trece prin punctul $A\left(1, \dfrac{4}{3}\right)$.
(20 puncte)

3. In mulțimea $M_2(R)$ se considerã matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, precum şi submulțimea $\{G = X(a) | a \in R \text{ si } X(a) = I_2 + aA\}$.
a) Sã se arate cã $X(a)X(b) = X(a + b + 3ab)$
b) Sã se arate cã $X(a)X\left(-\dfrac{1}{3}\right) = X\left(-\dfrac{1}{3}\right)$.
c) Utilizând metoda inducției matematice , sã se demonstreze cã :

$$(X(a))^n = X\left(3^{n-1}\left(a + \frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{3}\right) \quad , (\forall) n \in N^*$$

d) Sã se determine $t \in R$, pentru care :

$$X\left(-\frac{2009}{3}\right) \cdot X\left(-\frac{2008}{3}\right) \cdot \ldots \cdot X(0) \cdot X\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \ldots \cdot X\left(\frac{2009}{3}\right) = X(t) .$$

(20 puncte)

4. In urma unui accident naval, se varsa in mare petrol.Viteza de raspandire a petei de petrol pe suprafata apei, in functie de timp este data de legea $v(t) = e^t(t^2 + 1)$.

Sa se determine aria suprafetei contaminate in primele doua ore de la accident, stiind ca intr-un interval de timp $[t_1, t_2]$ aria este data de formula $A = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$, si sa se aproximeze rezultatul prin adaos cu o eroare de 1/100.
(30 puncte)

Nota :Toate subiectele sunt obligatorii.
Din oficiu se acorda 10 puncte.
Timp de lucru:3 ore.