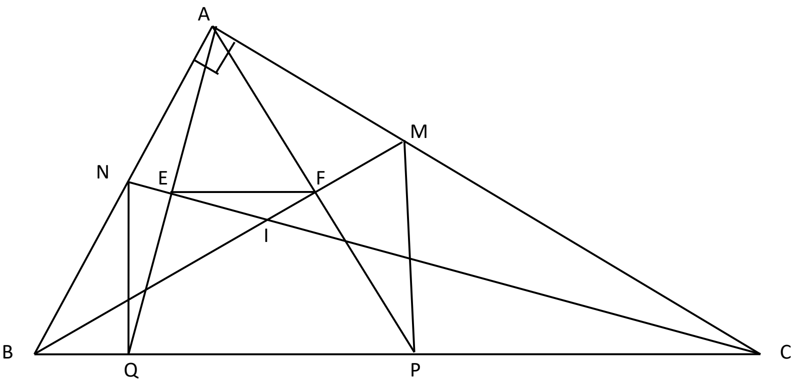
MATEMATICĂ, barem, clasa a VIII-a

Soluţie P1. Avem lungimile $c_1 = k(m^2 - n^2)$, $c_2 = 2kmn$ şi $ip = k(m^2 + n^2)$ $\mathcal{A}_\Delta = \mathcal{P}_\Delta \Leftrightarrow k^2mn(m^2 - n^2) = 2kmn(m + n)$ Se obţine relaţia $kn(m - n) = 2$ Se iau toate cazurile posibile şi avem: $(1, 2, 3)$, $(2, 1, 2)$ şi $(1, 3, 1)$ Obţinem triunghiurile : $(6, 8, 10)$ şi $(5, 12, 13)$	5p 5p 3p 5p 2p
Soluţie P2. $\frac{1}{a_1+1} = k_1 \Longrightarrow a_1 = \frac{1}{k_1} - 1$, iar $\frac{a_1}{a_1+1} = 1 - k_1$ Analog se procedează cu celelalte rapoarte. $\frac{a_2}{a_2+2} = 1 - k_2$, . . . , $\frac{a_{2012}}{a_{2012}+2012} = 1 - k_{2012}$. Se face suma şi $S = \frac{a_1}{a_1+1} + \frac{a_2}{a_2+2} + \frac{a_3}{a_3+3} + \cdots + \frac{a_{2012}}{a_{2012}+2012} =$ $\underbrace{1 + 1 \ldots + 1}_{2012\ termeni} - (k_1 + k_2 + \ \ldots + k_{2012})$ $= 2012 - \left(\frac{1}{a_1 + 1} + \frac{2}{a_2 + 2} + \cdots + \frac{2012}{a_{2012} + 2012}\right) = 2012 - 2011 = 1$	5p 10p 5p
Soluţie P3. $\left(\sqrt{ab + \sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{a+\sqrt{3}}{\sqrt{b}}\right)^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow a^2 - ab^2 + 3 = \sqrt{3}(b - 2a)$ $a, b \in \mathbb{Q}$ şi $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ deci $b - 2a = 0$ Deci $b = 2a$ şi $a^2 - ab^2 + 3 = 0$ Prelucrearea acestor relaţii conduce la $a - 1 = 0$, sau $4a^2 + 3a + 3 = 0$ Se obţine soluţia $(a, b) = (1, 2)$.	5p 3p 2p 8p 2p
	

Soluţie P4.

a) $\Delta ABM \equiv \Delta PBM$ (IU) $\Longrightarrow [AB] \equiv [BP] \Longrightarrow \Delta BAP$ isoscel $\Longrightarrow$

$m\widehat{BAP} = m\widehat{BPA} \Leftrightarrow m\widehat{BAQ} + m\widehat{QAP} = m\widehat{PAC} + m\widehat{ACB}$ (1) — 5p

($\widehat{APB}$ fiind unghi exterior triunghiului APC : $m\widehat{APB} = m\widehat{PAC} + m\widehat{ACB}$)

$\Delta ANC \equiv \Delta QNC$ (IU) $\Longrightarrow [AC] \equiv [QC] \Longrightarrow \Delta AQC$ isoscel — 3p

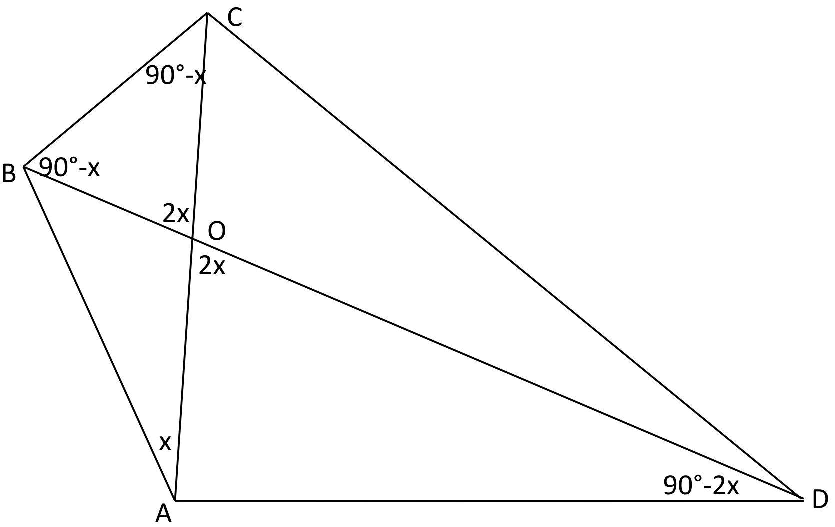
$\Longrightarrow m\widehat{QAC} = m\widehat{AQC} \Leftrightarrow m\widehat{QAP} + m\widehat{PAC} = m\widehat{BAQ} + m\widehat{ABQ}$ (2) — 3p

Din (1) şi (2) rezultă că $m\widehat{QAP} = \frac{m\widehat{ABC}+m\widehat{ACB}}{2} = 45°$ — 2p

b) În triunghiurile isoscele ABP şi ACQ, $[CE]$ şi $[BF]$ sunt şi mediane — 5p

deci $[EF]$ este linie mijlocie în ΔAQP şi urmează că $EF \parallel BC$ — 2p

Soluţie P5.



Fie $x = m\widehat{BAC}$. $[BO]$ mediană în ΔABC, iar ΔBCO şi ΔAOB isoscele. — 5p

În ΔABD: $\frac{BD}{\sin(90°+x)} = \frac{AB}{\sin(90°-2x)}$ de unde obţinem $\frac{BD}{AB} = \frac{\cos x}{\cos 2x}$ (1) — 4p

În ΔAOD: $tg(90° - 2x) = \frac{OA}{AD} \Longrightarrow AD = \frac{OA}{\mathrm{tg}(90°-2x)} \Longrightarrow AD = OA \cdot tg\, 2x$ (2) — 3p

În ΔBOC: $\frac{BC}{\sin 2x} = \frac{OC}{\sin(90°-x)} \Longrightarrow BC = \frac{OC \cdot \sin 2x}{\cos x} = \frac{OA \cdot \sin 2x}{\cos x}$ — 3p

Apoi $\frac{AD}{BC} = \frac{OA \cdot tg\, 2x}{\frac{OA \cdot \sin 2x}{\cos x}} = \frac{\cos x}{\cos 2x}$ (3) — 3p

Din (1), (2) şi (3) obţinem $\frac{AD}{BC} = \frac{BD}{AB}$ — 3p