

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 24 IANUARIE 2009**

CLASA A V-A

Varianta 3

1. Fie numerele $x = [2^{22} \cdot 4^{23} \cdot 8^{24} \cdot 16^{25} : 32^{32} + (7^{23})^5] : \{[(2^5)^2]^8 + 49^{20}\}$ și

$$y = 25^{13} : 5^{26} + 3^{42} : 9^{21} + 4^{15} : 8^{10}.$$

a) Arătați că $x + y$ este pătrat perfect.

b) Calculați x^y și y^x .

2. Se dă numărul : $n = 1234567891011...200720082009$.

a) Câte cifre are acest număr ?

b) Care este cifra de pe locul 2009 ?

3. a) Să se afle ultima cifră a numărului

$$1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2003$$

b) Determinați n număr natural diferit de zero astfel încât numărul

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n) + 73 \text{ să fie pătrat perfect.}$$

4. Să se demonstreze numărul natural \overline{abcdef} se divide cu 7 dacă și numai dacă

$$\overline{def} - \overline{abc} \text{ se divide cu } 7.$$

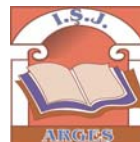
Selectate de: prof. Aurelian Costache și
prof. Ion Roșu

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

Timp de lucru 3 ore.



Barem a V-a

1. a) Calculează x și găsește $x = 1$ 2p
Calculează y și găsește $y = 3$ 2p
Calculează $x + y = 4 = 2^2$ 1p
b) Calculează x^y 1p
Calculează y^x 1p
2. a) Calculează câte cifre se folosesc la numerele de o cifră 1p
Calculează câte cifre se folosesc pentru numerele de 2 cifre 1p
Calculează câte cifre se folosesc la numerele de 3 cifre 1p
Calculează câte cifre se folosesc pentru numerele de 4 cifre 1p
Finalizare 1p
b) Află câte numere de trei cifre se scriu 1p
Finalizare 1p
3. a) Observă că începând cu al 4-lea termen, ultima cifră este 0 2p
Calculează ultima cifră a primilor trei termeni 1p
Finalizare 1p
b) Observă că pentru $n \geq 5$ ultima cifră este 3 și deci nu este pătrat perfect 1p
Verifica pentru $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ 1p
Finalizare $n \in \{2, 3\}$ 1p
4. „ \Rightarrow ” Scrie $\overline{abcdef} = \overline{abc} \cdot 1001 + \overline{def} - \overline{abc}$ 2p
Scrie $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ 2p
Scrie $1001 \rightarrow 7 \Rightarrow \overline{abc} \cdot 1001 \rightarrow 7$ 1p
Cum $\overline{abcdef} \rightarrow 7$ și $\overline{abc} \cdot 1001 \rightarrow 7 \Rightarrow \overline{def} - \overline{abc} \rightarrow 7$ 1p
„ \Leftarrow ” $\overline{abc} \cdot 1001 \rightarrow 7$ și $\overline{def} - \overline{abc} \rightarrow 7 \Rightarrow (\overline{abc} \cdot 1001 + \overline{def} - \overline{abc}) = \overline{abcdef} \rightarrow 7$ 1p