Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $(5-4i)^2+(5+4i)^2=18$, unde $i^2=-1$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+8$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-x-2}=x-2$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 9.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$ și $B(2,3)$. Determinați coordonatele punctului M, știind că punctul B este mijlocul segmentului AM.
5p	**6.** Calculați aria paralelogramului $ABCD$, știind că $AB=6$, $BC=3$ și $m(\sphericalangle ABC)=30°$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}0&0&x\\x&0&0\\0&x&0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(x)A(y)A(z)=xyz\,I_3$, pentru orice numere reale x, y și z.
5p	**c)** Demonstrați că, pentru orice număr natural nenul n, numărul $\det\left(A(n)A(n)+A(n)+I_3\right)$ este pătratul unui număr natural.
	2. Se consideră polinomul $f=X^4+aX^2+4$, unde a este număr real.
5p	**a)** Determinați numărul real a, știind că $f(2)=0$.
5p	**b)** Pentru $a=-5$, determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul X^2+X-2.
5p	**c)** Determinați rădăcinile polinomului f, știind că $f(i)=0$, unde $i^2=-1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f, în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Calculați $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\dfrac{1}{e^x+1}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^1 \left(e^x+1\right)f(x)\,dx=e-1$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_{-1}^{1} x\left(f(x)+f(-x)\right)dx=0$.

5p **c)** Demonstrați că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ și $x=1$ are aria mai mică decât $\ln 2$.

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$25-40i+16i^2+25+40i+16i^2=$	**3p**
	$=50+32i^2=50-32=18$	**2p**
2.	$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-6x+8=0$	**3p**
	$x=2$ și $x=4$	**2p**
3.	$x^2-x-2=(x-2)^2 \Rightarrow x^2-x-2=x^2-4x+4 \Rightarrow 3x=6$	**3p**
	$x=2$, care convine	**2p**
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale de două cifre care au produsul cifrelor egal cu 9 sunt 19, 33 și 91, deci sunt 3 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{3}{90}=\dfrac{1}{30}$	**1p**
5.	$x_B=\dfrac{x_A+x_M}{2} \Rightarrow x_M=2$	**3p**
	$y_B=\dfrac{y_A+y_M}{2} \Rightarrow y_M=5$	**2p**
6.	$\mathcal{A}_{ABCD}=AB\cdot BC\cdot\sin(\sphericalangle ABC)=6\cdot 3\cdot\sin 30^\circ=$	**3p**
	$=18\cdot\dfrac{1}{2}=9$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+1+0-0-0-0=1$	**3p**
b)	$A(x)A(y)A(z)=\begin{pmatrix}0&0&x\\x&0&0\\0&x&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&y\\y&0&0\\0&y&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&z\\z&0&0\\0&z&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&xy&0\\0&0&xy\\xy&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&z\\z&0&0\\0&z&0\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}xyz&0&0\\0&xyz&0\\0&0&xyz\end{pmatrix}=xyz\,I_3$, pentru orice numere reale x, y și z	**2p**

c)	$A(n)A(n)+A(n)+I_3=\begin{pmatrix}0&n^2&0\\0&0&n^2\\n^2&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&n\\n&0&0\\0&n&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&n^2&n\\n&1&n^2\\n^2&n&1\end{pmatrix}$	**2p**
	$\det\left(A(n)A(n)+A(n)+I_3\right)=\begin{vmatrix}1&n^2&n\\n&1&n^2\\n^2&n&1\end{vmatrix}=n^6-2n^3+1=\left(n^3-1\right)^2$, care este pătratul unui număr natural	**3p**
2.a)	$f(2)=0\Leftrightarrow 2^4+a\cdot 2^2+4=0$	**3p**
	$4a+20=0\Leftrightarrow a=-5$	**2p**
b)	$f=X^4-5X^2+4$; câtul este X^2-X-2	**3p**
	Restul este 0	**2p**
c)	$1-a+4=0\Rightarrow a=5$	**2p**
	$f=\left(X^2+1\right)\left(X^2+4\right)$, de unde obținem $x_1=i$, $x_2=-i$, $x_3=2i$ și $x_4=-2i$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\cdot\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1\right)=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\cdot\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(0)=0$, $f'(0)=1$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=x$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=0$	**3p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=-\infty$	**2p**
2.a)	$\int_0^1\left(e^x+1\right)f(x)dx=\int_0^1 e^x dx=e^x\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=e^1-e^0=e-1$	**2p**
b)	$\int_{-1}^1 x\left(f(x)+f(-x)\right)dx=\int_{-1}^1 x\left(1-\dfrac{1}{e^x+1}+1-\dfrac{1}{e^{-x}+1}\right)dx=$	**2p**
	$=\int_{-1}^1 x\left(2-\dfrac{e^x+1}{e^x+1}\right)dx=\int_{-1}^1 x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\Big\|_{-1}^1=0$	**3p**
c)	$\mathcal{A}=\int_0^1\left\|f(x)\right\|dx=\int_0^1\left(1-\dfrac{1}{e^x+1}\right)dx=\int_0^1\dfrac{e^x}{e^x+1}dx=\ln\left(e^x+1\right)\Big\|_0^1=\ln\dfrac{e+1}{2}$	**3p**
	Cum $e<3\Rightarrow\dfrac{e+1}{2}<2$, obținem $\mathcal{A}<\ln 2$	**2p**