Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 2+3i$ și $z_2 = 1+2i$. Arătați că $2z_1 - 3z_2 = 1$.
5p	**2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 - 3mx + 2 = 0$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că $x_1 + x_2 + x_1x_2 + 1 = 0$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4(x+3) + \log_4(x-3) = 2$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 6.
5p	**5.** Determinați numărul real a, pentru care vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\vec{v} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$ sunt coliniari.
5p	**6**. Arătați că $(\sin x - \cos x)^2 + \sin 2x = 1$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(0)) = -1$.
5p	**b)** Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(x)) \cdot \det(A(x+1)) = 12$.
5p	**c)** Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(2) \cdot X = A(0)$.
	2. Se consideră polinomul $f = X^3 - (m+2)X^2 + (m^2+2)X - 1$, unde m este număr real.
5p	**a)** Arătați că $f(0) = -1$, pentru orice număr real m.
5p	**b)** Demonstrați că $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 = -4(m-1)^2$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
5p	**c)** Determinați numărul real m pentru care toate rădăcinile polinomului f sunt numere reale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2e^x - x^2 - 2x - 2$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x) = 2(e^x - x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f, în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcţiei f.
5p	**c)** Demonstrați că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
	2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)^n$, unde n este număr natural nenul.
5p	**a)** Arătați că $\int_{-2}^{1} (x+2)^2 \, dx = 9$.
5p	**b)** Pentru $n = 1$, arătați că $\int_0^1 f(x) e^x dx = 2e - 1$.
5p	**c)** Determinaţi numărul natural nenul n pentru care suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = -1$ și $x = 1$ are aria egală cu $\dfrac{242}{n+1}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$2z_1-3z_2=2(2+3i)-3(1+2i)=$	**2p**
	$=4+6i-3-6i=1$	**3p**
2.	$x_1+x_2=3m$, $x_1x_2=2 \Rightarrow x_1+x_2+x_1x_2+1=3m+3$	**3p**
	$3m+3=0 \Leftrightarrow m=-1$	**2p**
3.	$\log_4\left((x+3)(x-3)\right)=2 \Rightarrow x^2-9=4^2 \Rightarrow x^2-25=0$	**3p**
	$x=-5$, care nu convine, $x=5$, care convine	**2p**
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale de două cifre care au produsul cifrelor egal cu 6 sunt 16, 23, 32 şi 61, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{4}{90}=\dfrac{2}{45}$	**1p**
5.	$\dfrac{a}{3}=\dfrac{2}{-3}$	**3p**
	$a=-2$	**2p**
6.	$(\sin x-\cos x)^2+\sin 2x=\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=$	**3p**
	$=\sin^2 x+\cos^2 x=1$, pentru orice număr real x	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+1-1-0-1=-1$	**3p**
b)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}x&1&1\\x+1&1&1\\1&x&1\end{vmatrix}=x-1$, $\det(A(x+1))=x \Rightarrow (x-1)x=12$	**3p**
	$x=-3$ sau $x=4$	**2p**
c)	$A(2)=\begin{pmatrix}2&1&1\\3&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}$, $\det(A(2))=1\neq 0$, $(A(2))^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-2&1&1\\5&-3&-1\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=(A(2))^{-1}\cdot A(0) \Rightarrow X=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&2&1\end{pmatrix}$	**2p**
2.a)	$f(0)=0^3-(m+2)\cdot 0^2+\left(m^2+2\right)\cdot 0-1=$	**2p**
	$=0-0+0-1=-1$, pentru orice număr real m	**3p**

b)	$x_1+x_2+x_3=m+2$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=m^2+2 \Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=-m^2+4m$	**3p**
	$(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2=2\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=$ $=2\left(-m^2+4m-m^2-2\right)=-4(m-1)^2$, pentru orice număr real m	**2p**
c)	$x_1, x_2, x_3\in\mathbb{R} \Rightarrow x_1-x_2, x_2-x_3, x_3-x_1\in\mathbb{R} \Rightarrow (x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2\geq 0$, deci $(m-1)^2\leq 0$	**2p**
	$m=1$, caz în care toate rădăcinile polinomului f sunt numere reale	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(2e^x\right)'-\left(x^2\right)'-(2x)'-(2)'=$	**2p**
	$=2e^x-2x-2=2\left(e^x-x-1\right)$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$f(0)=0$, $f'(0)=0$	**2p**
	Ecuaţia tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=0$	**3p**
c)	$f''(x)=2\left(e^x-1\right)$, $x\in\mathbb{R}$	**1p**
	$x\in(-\infty,0] \Rightarrow f''(x)\leq 0$, deci f' este descrescătoare pe $(-\infty,0]$	**1p**
	$x\in[0,+\infty) \Rightarrow f''(x)\geq 0$, deci f' este crescătoare pe $[0,+\infty)$	**1p**
	$f'(x)\geq f'(0)$ şi $f'(0)=0$ implică $f'(x)\geq 0$ pentru orice număr real x, deci funcţia f este crescătoare pe $\mathbb{R}$	**2p**
2.a)	$\int_{-2}^{1}(x+2)^2\,dx=\left.\frac{(x+2)^3}{3}\right\|_{-2}^{1}=$	**3p**
	$=\frac{3^3}{3}-0=9$	**2p**
b)	$\int_0^1(x+2)e^x\,dx=\left.(x+2)e^x\right\|_0^1-\int_0^1 e^x\,dx=3e-2-\left.e^x\right\|_0^1=$	**3p**
	$=3e-2-e+1=2e-1$	**2p**
c)	$\mathcal{A}=\int_{-1}^{1}\|f(x)\|\,dx=\int_{-1}^{1}(x+2)^n\,dx=\left.\frac{(x+2)^{n+1}}{n+1}\right\|_{-1}^{1}=\frac{3^{n+1}-1}{n+1}$	**3p**
	$\frac{3^{n+1}-1}{n+1}=\frac{242}{n+1} \Leftrightarrow 3^{n+1}=243 \Leftrightarrow 3^{n+1}=3^5 \Leftrightarrow n=4$	**2p**