Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați primul termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\ge 1}$, știind că $a_3=10$ și rația $r=3$.
5p	**2.** Determinaţi numărul real m, știind că punctul $A(1,3)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+2m$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.
5p	**4.** Determinaţi câte numere naturale pare, de două cifre distincte, au cifrele elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,2)$ şi $B(2,4)$. Determinaţi ecuația mediatoarei segmentului AB.
5p	**6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului dreptunghic ABC care are catetele $AB=8$ și $AC=6$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 2x+5\\ 5 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(-2))=-4$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(x)+A(-x)=A(2017)+A(-2017)$, pentru orice număr real x.
5p	**c)** Determinați numerele reale p și q, pentru care $A(0)\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ 6\end{pmatrix}$.
	2. Pe mulţimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+6x+6y+30$.
5p	**a)** Arătați că $x\circ y=(x+6)(y+6)-6$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**b)** Arătați că $e=-5$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.
5p	**c)** Determinați numărul real x pentru care $x\circ(-2017)=2017\circ(-6)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{x}+\ln x$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x-2}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcţiei f.
5p	**c)** Demonstrați că $\frac{2}{x}+\ln x\ge 1+\ln 2$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
	2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+2}{2x}$.
5p	**a)** Arătaţi că $\int_1^2 2x\,f(x)\,dx=\frac{13}{3}$.
5p	**b)** Determinaţi primitiva F a funcţiei f, pentru care $F(1)=1$.
5p	**c)** Demonstrați că $2\int_1^n\left(f(x)+x\,f'(x)\right)dx=n^2-1$, pentru orice număr natural n, $n\ge 2$.

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_1 = a_3 - 2r = 10 - 6 =$	**3p**
	$= 4$	**2p**
2.	$f(1) = 3 \Leftrightarrow 1 - m + 2m = 3$	**3p**
	$m = 2$	**2p**
3.	$4^x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4^x = 4^{-1}$	**3p**
	$x = -1$	**2p**
4.	Cifra unităților se poate alege în 2 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor se poate alege în câte 3 moduri, deci se pot forma $3 \cdot 2 = 6$ numere	**3p**
5.	$x_M = 3$ și $y_M = 3$, unde M este mijlocul segmentului AB	**2p**
	$m_{AB} = -1 \Rightarrow m_{\text{mediatoare}} = 1$, deci ecuația mediatoarei segmentului AB este $y = x$	**3p**
6.	$BC = 10$	**2p**
	$R = 5$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(-2)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= 1 - 5 = -4$	**3p**
b)	$A(x) + A(-x) = \begin{pmatrix} 1 & 2x+5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2x+5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$	**3p**
	$A(2017) + A(-2017) = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} = A(x) + A(-x)$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$A(0)\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+5q \\ 5p+q \end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix} p+5q \\ 5p+q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow p = q = 1$	**2p**
2.a)	$x \circ y = xy + 6x + 6y + 36 - 6 =$	**2p**
	$= x(y+6) + 6(y+6) - 6 = (x+6)(y+6) - 6$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$x \circ (-5) = (x+6) \cdot (-5+6) - 6 = x$	**2p**
	$(-5) \circ x = (-5+6) \cdot (x+6) - 6 = x = x \circ (-5)$, pentru orice număr real x	**3p**
c)	$(x+6)(-2017+6) - 6 = (2017+6)(-6+6) - 6$	**2p**
	$x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -6$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(\frac{2}{x}\right)'+(\ln x)'=$	**2p**
	$=-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-2}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$f(1)=2$, $f'(1)=-1$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=-x+3$	**3p**
c)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$	**1p**
	$x\in(0,2] \Rightarrow f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe $(0,2]$	**1p**
	$x\in[2,+\infty) \Rightarrow f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $[2,+\infty)$	**1p**
	$f(x)\ge f(2)$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$ și, cum $f(2)=1+\ln 2$, obținem $\frac{2}{x}+\ln x\ge 1+\ln 2$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_1^2 2x f(x)dx=\int_1^2 2x\cdot\frac{x^2+2}{2x}dx=\int_1^2\left(x^2+2\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+2x\right)\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=\left(\frac{8}{3}+4\right)-\left(\frac{1}{3}+2\right)=\frac{13}{3}$	**2p**
b)	$F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^2}{4}+\ln x+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**3p**
	$F(1)=1\Rightarrow c=\frac{3}{4}$, deci $F(x)=\frac{x^2}{4}+\ln x+\frac{3}{4}$	**2p**
c)	$2\int_1^n\left(f(x)+xf'(x)\right)dx=2\int_1^n\left(xf(x)\right)'dx=2\left(xf(x)\right)\Big\vert_1^n=\left(x^2+2\right)\Big\vert_1^n=$	**3p**
	$=\left(n^2+2\right)-(1+2)=n^2-1$, pentru orice număr natural n, $n\ge 2$	**2p**