OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 24 IANUARIE 2009

CLASA A VII-A

Varianta 3

1. Să se determine mulțimea: $A=\left\{\overline{abc} \mid \sqrt{\overline{abc5}}+\sqrt{\overline{bc5}}+\sqrt{\overline{c5}}=105\right\}$.

GM

2. **i**) *A* este o mulțime formată din 8 numere întregi consecutive. Arătați că pentru orice $k\in\{5, 6, 7\}$, există *k* elemente în *A*, astfel încât media lor aritmetică să aparțină mulțimii *A*.
ii) *M* este o mulțime de numere reale cu cel puțin patru clemente cu proprietatea că media aritmetică a oricăror trei elemente distincte din *M* aparține lui *M*. Arătați că *M* este infinită. (*Eleonora Savu*)

3. Se dă paralelogramul *ABCD* cu *AB* = 2 · *AD*. Se cer:
a) Să se demonstreze că bisectoarele unghiurilor *DAB* şi *CBA* se intersectează într-un punct *E* situat pe *DC*;
b) Dacă bisectoarea unghiului *ADC* intersectează pe *AB* în *F* demonstrați că *AFED* este romb;
c) Dacă $DF \cap AE = \{M\}$ şi $CF \cap BE = \{N\}$ demonstrați că *MFNE* este dreptunghi.

4. În patrulaterul convex *ABCD*, [*AE* este bisectoarea unghiului *BAD*, $E\in(DC)$. Dacă $AE \cup BC$ şi (*BC*) = (*DE*), să se demonstreze că: $\dfrac{DC}{BC}-\dfrac{AB}{AD}=1$.

Selectate de: prof. Aurelian Costache şi
prof. Ion Roşu

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru 3 ore.

Barem a VII-a

1. Scrie $\overline{c5}=25$ şi $\overline{bc5}=\overline{b25} \Rightarrow b \in \{2; 6\}$ 2p

Dacă $b = 2 \Rightarrow \sqrt{\overline{abc5}}+\sqrt{225}+\sqrt{25}=105 \Rightarrow \sqrt{\overline{a225}}=85 \Rightarrow a=7$ 2p

Dacă $b = 6 \Rightarrow \overline{bc5}=625 \Rightarrow \sqrt{\overline{a625}}+25+5=105 \Leftrightarrow \sqrt{\overline{a625}}=75 \Rightarrow a=5$ 2p

Finalizare $A = \{562; 722\}$ 1p

2. i) Fie $A = \{n, n+1, n+2, \ldots, n+7\}$ cu $n \in \mathbb{Z}$ 0,5p

$k=5 \Rightarrow \dfrac{n+n+1+\ldots+n+4}{5}=n+2 \in A,$ 0,5p

$k=6 \Rightarrow \dfrac{n+n+1+n+2+n+4+n+5+n+6}{6}=n+3 \in A,$ 0,5p

$k=7 \Rightarrow \dfrac{n+1+n+2+\ldots+n+7}{7}=n+4 \in A$ 0,5p

ii) Presupunem prin absurd că M este finită adică $M = \{a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \ldots < a_n\}$ 0,5p

$a_1 < \dfrac{a_1+a_2+a_3}{3} < a_3 \Rightarrow \dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}=a_2 \Rightarrow 2a_2=a_1+a_3$ 1p

$a_2 < \dfrac{a_2+a_3+a_4}{3} < a_4 \Rightarrow \dfrac{a_2+a_3+a_4}{3}=a_3 \Rightarrow 2a_3=a_2+a_4$ 1p

$a_1 < \dfrac{a_1+a_2+a_4}{3} < a_4 \Rightarrow \dfrac{a_1+a_2+a_4}{3} \in \{a_2, a_3\}$ 1p

Dacă $\dfrac{a_1+a_2+a_4}{3}=a_2$ sau $\dfrac{a_1+a_2+a_4}{3}=a_3 \Rightarrow a_3=a_4$ sau $a_1=a_3$. Fals. 1p

Finalizare M este infinită. 0,5p

3. a) Fie E mijlocul lui $[DC] \Rightarrow m(\widehat{DAE})=m(\widehat{DEA}) \Rightarrow$ 1p

$\Rightarrow$ (AE = bisectoarea unghiului DAB. Analog (BE bisectoarea unghiului CBA 1p

b) F este mijlocul lui $[AB] \Rightarrow DE = AF$ 1p

cum $DE \cup AF \Rightarrow AFED$ – paralelogram, ... 1p

dar $AF = AD \Rightarrow AFED$ – romb 1p

c) Găseşte $m(\widehat{FME})=90°$ 1p

Finalizare $MFNE$ – dreptunghi. 1p

4. Din teorema bisectoarei în ΔADB rezultă că $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{BO}{DO}$, ... 2p

Din teorema lui Thales în ΔBDC avem $\dfrac{DE}{DC}=\dfrac{DO}{DB}$, ... 2p

Deduce că $\dfrac{DC}{BC}=\dfrac{DB}{DO}$. 2p

Finalizare $\dfrac{DC}{BC}-\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{DB}{DO}-\dfrac{BO}{DO}=\dfrac{DO}{DO}=1$ 1p