

CONCURS DE ADMITERE, 17 iulie 2017
Proba scrisă la MATEMATICĂ

SUBIECTUL I (30 puncte)

- 1) (10 puncte) Să se arate că oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$, intersecția

$$\{x \in \mathbb{R} \mid (m^2 + 1)x^2 - 2(m+1)x + 1 = 0\} \cap (-\infty, 0)$$

este vidă.

- 2) Considerăm legea de compoziție $*$ definită pe \mathbb{Q} prin

$$x * y = xy - 2x - 2y + 6, \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

- a) (15 puncte) Să se arate că $\mathbb{Q} \setminus \{2\}$ este parte stabilă a lui \mathbb{Q} în raport cu $*$ și că $(\mathbb{Q} \setminus \{2\}, *)$ este un grup abelian.

- b) (5 puncte) Să se determine $a \in \mathbb{Q}$ astfel încât $f : \mathbb{Q}^* \rightarrow \mathbb{Q} \setminus \{2\}$, $f(x) = x + a$ să fie un izomorfism de grupuri de la (\mathbb{Q}^*, \cdot) la $(\mathbb{Q} \setminus \{2\}, *)$.

SUBIECTUL II (30 puncte)

- 1) (10 puncte) Să se determine soluțiile ecuației

$$\cos 4x \cos 8x - \cos 5x \cos 9x = 0$$

situate în intervalul $(0, 2)$.

- 2) Într-un reper ortogonal xOy considerăm punctele $A(a, 0)$ și $B(0, b)$. În triunghiul OAB fie H piciorul perpendicularării din O pe AB . În exteriorul triunghiului OAB se construiesc pătratele $OACD$ și $OBEF$.

- a) (10 puncte) Determinați ecuațiile dreptelor AE și BC .

- b) (10 puncte) Demonstrați că dreptele AE , BC și OH sunt concurente.

SUBIECTUL III (30 puncte)

Considerăm funcția $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin relația

$$f(x) = \frac{2}{\ln 5} \ln(1+x) + \sqrt{x}, \quad \forall x \geq 0.$$

- 1) (10 puncte) Calculați f' și demonstrați că $4 \leq f(x) \leq x$, $\forall x \geq 4$.

- 2) (5 puncte) Demonstrați că sirul definit prin relația $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$ și $x_0 \geq 4$ este convergent și calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

- 3) (10 puncte) Să se calculeze

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (1 + f(x))^{\frac{1}{\sqrt{x}}}.$$

- 4) (5 puncte) Să se calculeze

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \int_x^4 f'(t)f(t) dt.$$

NOTĂ:

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**Barem de corectare pentru proba de MATEMATICĂ
a concursului de admitere, 17 iulie 2017**

SUBIECTUL I (30 puncte)

- 1) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (m^2 + 1)x^2 - 2(m+1)x + 1 = 0\}$ este mulțimea soluțiilor reale ale unei ecuații de gradul 2 pentru care $\Delta = 4(m+1)^2 - 4(m^2 + 1) = 8m$ 2 p
 Dacă $m < 0$ atunci $A = \emptyset$ 2 p
 Dacă $m \geq 0$ atunci cele 2 soluții (posibil egale) ale ecuației $(m^2 + 1)x^2 - 2(m+1)x + 1 = 0$ sunt reale și au același semn încrucișat produsul lor este $\frac{1}{m^2 + 1} > 0$ 3 p
 $m \geq 0 \Rightarrow m+1 > 0 \Rightarrow \frac{2(m+1)}{m^2 + 1} > 0$, așadar aceste soluții sunt pozitive având suma pozitivă 2 p
 Finalizare 1 p
 2) a) Stabilitatea se rescrie astfel: $x, y \in \mathbb{Q}, x * y = 2 \Leftrightarrow x = 2$ sau $y = 2$, iar
 $xy - 2x - 2y + 6 = 2 \Leftrightarrow 0 = xy - 2x - 2y + 4 = (x-2)(y-2) \Rightarrow x = 2$ sau $y = 2$ 3 p
 Verificarea asociativității $*$ (pentru orice $x, y, z \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}$),
 $x * (y * z) = (x * y) * z = xyz - 2xy - 2xz - 2yz + 4x + 4y + 4z - 6$ 3 p
 Verificarea comutativității $*$ 3 p
 Luând pe $x = 0$ în $x * e = x, \forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}$ obținem $e = 3$, prin urmare, dacă există element neutru, acesta este $e = 3$ 2 p
 Verificarea faptului că $x * 3 = x, \forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}$ pentru finalizarea demonstrației existenței elementului neutru 1 p
 Toate elementele din $\mathbb{Q} \setminus \{2\}$ sunt simetrizabile în raport cu $*$: dacă $x \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}$,
 $x * x' = 3 \Leftrightarrow xx' - 2x - 2x' + 6 = 3 \Leftrightarrow (x-2)x' = 2x - 3 \Leftrightarrow x' = \frac{2x-3}{x-2}$
 care aparține mulțimii $\mathbb{Q} \setminus \{2\}$ 3 p
 b) f funcție bijectivă $\Leftrightarrow (x+a=2$ atunci și numai atunci când $x=0) \Leftrightarrow a=2$ 3 p
 Verificarea faptului că f este morfism 2 p
 $f(x) * f(y) = (x+2) * (y+2) = (x+2)(y+2) - 2(x+2) - 2(y+2) + 6 = xy + 2 = f(xy)$

SUBIECTUL II (30 puncte)

Problema 1

- (i) Ecuația este echivalentă cu $\cos 12x - \cos 14x = 0$ 3 p
 (ii) Ecuația de la punctul precedent este echivalentă cu $\sin 13x \cdot \sin x = 0$ 3 p
 (iii) Soluția generală a ecuației de la (ii) este $S = \underbrace{\left\{ \frac{\pi}{13}k, k \in \mathbb{Z} \right\}}_{S_1} \cup \underbrace{\{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}}_{S_2}$ 1 p
 (iv) $S_2 \cap (0, 2) = \emptyset$ 1 p
 (v) $0 < \frac{\pi}{13}k < 2$, deci $0 < k < \frac{26}{\pi}$ 1 p
 (vi) $x = \frac{\pi}{13}, \frac{2\pi}{13}, \frac{3\pi}{13}, \frac{4\pi}{13}, \frac{5\pi}{13}, \frac{6\pi}{13}, \frac{7\pi}{13}, \frac{8\pi}{13}$ 1 p

Problema 2

Notăm cu P punctul de intersecție dintre dreptele AE și BC .

a)

- (i) $C(a, -a), E(-b, b)$ 2 p
 (ii) Ecuația dreptei AE este $bx + (a+b)y - ab = 0$ 4 p

(iii) Ecuația dreptei BC este $(a+b)x + ay - ab = 0$ 4 p

b)

(i) Punctul P are coordonatele $P\left(\frac{ab^2}{a^2 + b^2 + ab}, \frac{a^2b}{a^2 + b^2 + ab}\right)$ 3 p

(ii) Panta dreptei AB este $k_{AB} = -\frac{b}{a}$ 2 p

(iii) Panta dreptei OH este $k_{AB} = \frac{a}{b}$ 2 p

(iv) ecuația dreptei OH este $y = \frac{a}{b}x$ 2 p

(v) punctul P aparține dreptei OH 1 p

SUBIECTUL III (30 puncte)

1) $f'(x) = \frac{2}{\ln 5} \cdot \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ pe $(0, \infty)$ 2 p

$f(4) = 4$ 1 p

f crescătoare, deci $f(x) \geq f(4) = 4$ pentru $x \geq 4$ 2 p

$g : [4, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$ 1 p

$g'(x) = f'(x) - 1$, și $g''(x) = f''(x) = \frac{2}{\ln 5} \cdot \frac{-1}{(1+x)^2} - \frac{1}{4x\sqrt{x}} < 0$, $\forall x \geq 4$ 2 p

$g'(4) = \frac{2}{5\ln 5} - \frac{3}{4} < 0$, deci $g'(x) < 0$, $\forall x \geq 4$ 1 p

$g(4) = 0$, deci $g(x) \leq 0$, $\forall x \geq 4$ 1 p

2) Demonstrarea prin inducție matematică a inegalității $x_n \geq 4$, $\forall n \in \mathbb{N}$ 2 p

$x_{n+1} = f(x_n) \leq x_n$, deci sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este descrescător 1 p

$l \geq 4$ 1 p

$l = f(l) \Rightarrow l = 4$ 1 p

3) $f(0) = 0$, și f este continuă în 0, deci avem o nedeterminare de tipul 1^∞ 1 p

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (1 + f(x))^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left[(1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)}} \right]^{\frac{f(x)}{\sqrt{x}}}$ 3 p

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{2}{\ln 5} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{2}{\ln 5} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \sqrt{x} = 1 + \frac{2}{\ln 5} \cdot 1 \cdot 0 = 1$ 4 p

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (1 + f(x))^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = e$ 2 p

4) $f'(t) \cdot f(t) = \frac{1}{2}(f^2)'(x)$ 2 p

$\int_x^4 f'(t)f(t) dt = \frac{1}{2}f^2(t) \Big|_x^4 = \frac{1}{2}f^2(4) - \frac{1}{2}f^2(x)$ 2 p

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \int_x^4 f'(t)f(t) dt = \frac{1}{2}f^2(4) - \frac{1}{2}f^2(0) = 8$ 1 p

NOTĂ: Orice altă soluție corectă va fi punctată corespunzător.

SOLUȚII
CONCURS DE ADMITERE, 17 iulie 2017
Proba scrisă la MATEMATICĂ

SUBIECTUL I (30 puncte)

1) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (m^2 + 1)x^2 - 2(m+1)x + 1 = 0\}$ este multimea soluțiilor reale ale unei ecuații de gradul 2 pentru care $\Delta = 4(m+1)^2 - 4(m^2 + 1) = 8m$. Dacă $m < 0$, atunci ecuația nu are rădăcini reale, deci $A = \emptyset$. Dacă $m \geq 0$, atunci cele 2 soluții (posibil egale) ale ecuației $(m^2 + 1)x^2 - 2(m+1)x + 1 = 0$ sunt reale și au același semn încrucișat produsul lor este $\frac{1}{m^2 + 1} > 0$. Din condiția $m \geq 0$ rezultă $m+1 > 0$,

deci $x_1 + x_2 = \frac{2(m+1)}{m^2 + 1} > 0$. Așadar aceste soluții sunt pozitive, deci intersecția este vidă și în acest caz.

2) a) Pentru a demonstra stabilitatea este suficient să demonstrăm $x, y \in \mathbb{Q}, x * y = 2 \Leftrightarrow x = 2$ sau $y = 2$. Din relația $x * y = 2$ obținem $xy - 2x - 2y + 6 = 2$, adică $0 = xy - 2x - 2y + 4 = (x-2)(y-2)$, deci $x = 2$ sau $y = 2$.

Pentru orice $x, y, z \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}$ avem $x * (y * z) = (x * y) * z = xyz - 2xy - 2xz - 2yz + 4x + 4y + 4z - 6$. Pentru orice $x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}$ avem $x * y = xy - 2x - 2y + 6 = y = 2y = 2x + 6 = y * x$, deci operația este comutativă. Luând pe $x = 0$ în $x * e = x, \forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}$ obținem $e = 3$, prin urmare, dacă există element neutru, acesta este $e = 3$. Pe de altă parte $x * 3 = x, \forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}$, deci $e = 3$ este element neutru. Pentru orice $x \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}$ $x * x' = 3 \Leftrightarrow xx' - 2x - 2x' + 6 = 3 \Leftrightarrow (x-2)x' = 2x - 3 \Leftrightarrow x' = \frac{2x-3}{x-2} = 2 + \frac{1}{x-2} \neq 2$, care există și aparține mulțimii $\mathbb{Q} \setminus \{2\}$. b) f funcție bijectivă $\Leftrightarrow (x+a=2$ atunci și numai atunci când $x=0) \Leftrightarrow a=2$. Pentru $a=2$ avem $f(x) * f(y) = (x+2) * (y+2) = (x+2)(y+2) - 2(x+2) - 2(y+2) + 6 = xy + 2 = f(xy)$, deci f este morfism. În consecință valoarea lui a pentru care f este izomorfism este $a=2$.

SUBIECTUL II (30 puncte)

1) Ecuția se poate scrie

$$\frac{1}{2}(\cos 12x + \cos 4x) = \frac{1}{2}(\cos 14x + \cos 4x)$$

sau

$$\cos 12x - \cos 14x = 0,$$

de unde

$$\sin 13x \cdot \sin x = 0.$$

Rezolvând această ecuație, obținem

$$x = \frac{\pi}{13}k, k \in \mathbb{Z} \quad \text{sau} \quad x = n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

Este clar că cea de-a doua familie de soluții este inclusă în prima, deci putem spune că soluția generală a ecuației este

$$x = \frac{\pi}{13}k, k \in \mathbb{Z}.$$

Pentru a obține soluțiile ce verifică cerința problemei, trebuie să punem condiția

$$0 < \frac{\pi}{13}k < 2,$$

de unde

$$0 < k < \frac{26}{\pi}.$$

k trebuie să fie un număr întreg, obținem $k = 1, \dots, 8$, deci soluțiile acceptabile sunt:

$$x = \frac{\pi}{13}, \frac{2\pi}{13}, \frac{3\pi}{13}, \frac{4\pi}{13}, \frac{5\pi}{13}, \frac{6\pi}{13}, \frac{7\pi}{13}, \frac{8\pi}{13}.$$

2) Coordonatele punctelor care ne interesează sunt, după cum e ușor de constatat, următoarele: $C(a, -a)$, $E(-b, b)$. Dreapta AE are ecuația

$$bx + (a+b)y - ab = 0,$$

în timp ce dreapta BC are ecuația

$$(a+b)x + ay - ab = 0.$$

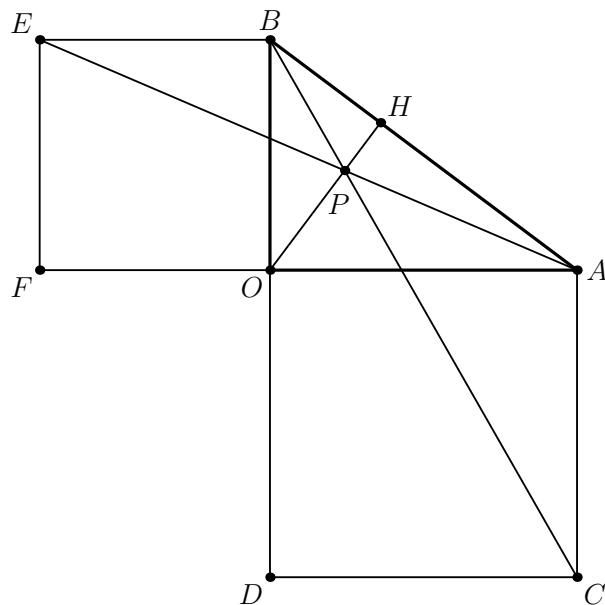
Fie P punctul de intersecție a dreptelor AE și BC . Atunci coordonatele lui P sunt date de soluția sistemului

$$\begin{cases} bx + (a+b)y - ab = 0, \\ (a+b)x + ay - ab = 0, \end{cases}$$

ceea ce ne conduce la

$$P = P\left(\frac{ab^2}{a^2 + b^2 + ab}, \frac{a^2b}{a^2 + b^2 + ab}\right).$$

Tot ce mai avem de făcut este să demonstrăm că dreapta OH trece prin punctul P .



Panta dreptei AB este $k_{AB} = -\frac{b}{a}$, ceea ce înseamnă că panta dreptei OH , care este perpendiculară pe AB , $k_{OH} = \frac{a}{b}$, deci ecuația dreptei OH este

$$y = \frac{a}{b}x.$$

Este ușor de constatat că punctul P aparține dreptei OH (coordonatele sale verifică ecuația dreptei).

SUBIECTUL III (30 puncte)

1) Calculăm derivata funcției:

$$f'(x) = \frac{2}{\ln 5} \cdot \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Pentru $x > 0$ avem $f'(x) > 0$, deci funcția f este strict crescătoare pe $(0, \infty)$. Pe de altă parte $f(4) = 4$, deci din faptul că f este strict crescătoare rezultă $f(x) > f(4) = 4$ pentru $x > 4$, deci $f(x) \geq 4$, $\forall x \geq 4$.

Pentru cea de a doua inegalitate considerăm funcția $g : [4, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$. $g'(x) = f'(x) - 1$, și $g''(x) = f''(x) = \frac{2}{\ln 5} \cdot \frac{-1}{(1+x)^2} - \frac{1}{4x\sqrt{x}} < 0$, $\forall x \geq 4$. Astfel g' este strict descrescătoare. Însă $g'(4) = \frac{2}{5\ln 5} - \frac{3}{4} < 0$ deoarece $\ln 5 > 1$, deci $g'(x) < 0$, $\forall x \geq 4$ și g este strict descrescătoare. Pe de altă parte $g(4) = 0$, deci $g(x) \leq 0$, $\forall x \geq 4$. Această inegalitate este echivalentă cu $f(x) \leq x \forall x \geq 4$.

2) Demonstrăm prin inducție matematică inegalitatea $x_n \geq 4$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Pentru $n = 0$ inegalitatea este adevărată datorită condiției din enunț. Dacă $x_k \geq 4$, atunci $x_{k+1} = f(x_k) \geq 4$ datorită inegalității $f(x) \geq 4$, $\forall x \geq 4$. Astfel pe baza principiului inducției matematice avem $x_n \in [0, \infty)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Folosind a doua inegalitate de la 1) deducem $x_{n+1} = f(x_n) \leq x_n$, deci sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este descrescător și mărginit inferior, adică convergent. Fie l limita sirului $(x_n)_{n \geq 0}$. Din inegalitatea $x_n \geq 4$, $\forall n \geq 0$ prin trecere la limită obținem $l \geq 4$, iar prin trecere la limită în relația de recurență obținem $l = f(l)$. Astfel folosind 1) deducem $l = 4$.

3) $f(0) = 0$, și f este continuă în 0, deci avem o nedeterminare de tipul 1^∞ și putem folosi limita $\lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e$ (cu $y = f(x)$).

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (1 + f(x))^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left[(1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)}} \right]^{\frac{f(x)}{\sqrt{x}}},$$

deci avem de calculat $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{\sqrt{x}}$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{2}{\ln 5} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{2}{\ln 5} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \sqrt{x} = 1 + \frac{2}{\ln 5} \cdot 1 \cdot 0 = 1,$$

deci

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (1 + f(x))^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = e.$$

4) $f'(t) \cdot f(t) = \frac{1}{2}(f^2)'(x)$, deci $\int_x^4 f'(t)f(t) dt = \frac{1}{2}f^2(t) \Big|_x^4 = \frac{1}{2}f^2(4) - \frac{1}{2}f^2(x)$. Astfel limita cerută este

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \int_x^4 f'(t)f(t) dt = \frac{1}{2}f^2(4) - \frac{1}{2}f^2(0) = 8.$$