R O M Â N I A
MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN ARGEŞ

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 24 IANUARIE 2009

CLASA A VIII-A

Varianta 3

1. **a**) Verificaţi dacă numărul: $n = 3^{2007} + 3^{1895} + 3^{1782} + 3^{1668}$ este cub perfect.

b) Se dă fracţia: $F(x) = \dfrac{x^2(x^2+10x+25)+12x(x+5)+35}{(x+2)(x+3)+1}$, $x \in \mathbb{R} \langle \{-3, -2\}$.

Arătaţi că $F(x) \in \mathbb{N}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{N}$.

2. De aceeaşi parte a planului unui pătrat $ABCD$ cu $AB = 2a$ se ridică perpendicularele în A, B şi D pe plan pe care se iau punctele E, F respectiv G astfel încât $AE = a$, $BF = 4a$ şi $DG = a$. Arătaţi ca:

a) $BCGE$ este dreptunghi;

b) $AF \perp CG$.

3. Fie $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}_+$, cu $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = 1$, arătaţi că

$$\left(a_1 + \sqrt{a_1} + 1\right) \cdot \left(a_2 + 2\sqrt{a_2} + 1\right) \cdot \left(a_3 + 3\sqrt{a_3} + 1\right) \cdot ... \cdot \left(a_n + n\sqrt{a_n} + 1\right) \geq \quad \geq$$
$$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot ... \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2).$$

4. În interiorul unghiului XOY cu măsura de $60°$ se consideră punctul A depărtat de $[OX$ la 2 cm şi faţă de $[OY$ la 11 cm. În punctul A pe planul (XOY) se ridică perpendiculara AM, $AM = 4\sqrt{3}$ cm. Calculaţi:

a) distanţa de la M la laturile unghiului;

b) lungimea segmentului OM.

Selectate de: prof. Aurelian Costache şi
prof. Ion Roşu

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru 3 ore.

Barem clasa a VIII-a

1. a) Dă factor comun $n = 3^{1668}(3^{339} + 3^{227} + 3^{114} + 1)$ 1p

Obține $n = (3^{556})^3 \left[(3^{113})^3 + 3\cdot(3^{113})^2 + 3\cdot 3^{113} + 1\right]$ 2p

Finalizare $n = \left[3^{556}(3^{113} + 1)\right]^3$ = cub perfect. 1p

b) Descompune numărătorul 1p

Descompune numitorul 1p

Simplifică şi obține $x(x + 5) \in \mathbb{N}$ 1p

2. a) Din $AE \perp (ABC)$; $DG \perp (ABC) \Rightarrow AE \cup DG$ 1p

şi cum $AE = DG = a \Rightarrow ADGE$ este dreptunghi 1p

Cum $BC \cup AD$ şi $AD \cup EG \Rightarrow BC \cup EG$ şi $[AD] \equiv [EG]$; $[BC] \equiv [AD] \Rightarrow [BC] \equiv [EG]$ obține că $BCGE$ este paralelogram 1p

$AB \perp AE$ şi $AB \perp AD \Rightarrow AB \perp (ADE)$; $AE \perp EG \overset{T3\perp}{\Rightarrow} BE \perp EG \Rightarrow BCGE$ este dreptunghi 1p

b) Cu teorema lui Pitagora obținem $BE = a\sqrt{5}$ şi $AF = 2\sqrt{5}a$ 1p

Dacă $\{M\} = AF \cap BE \Rightarrow \dfrac{AE}{BF} = \dfrac{AM}{MF} = \dfrac{EM}{MB} \Rightarrow AM = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}a$ şi $MB = \dfrac{4\sqrt{5}a}{5}$ 1p

$AM^2 + MB^2 = AB^2 \Rightarrow AM \perp MB$, adică $AF \perp BE$, $BE \cup CG \Rightarrow AF \perp CG$ 1p

3. Scrie inegalitatea mediilor $a_i + 1 \geq 2\sqrt{a_i}$ 2p

Scrie că $a_i + i\sqrt{a_i} + 1 \geq (i+2)\sqrt{a_i}$ 2p

Face produsul tuturor inegalităților şi obține:

$\left(a_1 + \sqrt{a_1} + 1\right)\left(a_2 + 2\sqrt{a_2} + 1\right)\cdot\ldots\cdot\left(a_n + n\sqrt{a_n} + 1\right) \geq 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n+1)\cdot\sqrt{a_1}\cdot\ldots\cdot\sqrt{a_n}$ 1p

Finalizare ținând cont de ipoteza $\sqrt{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n} = 1$ 2p

4. a) Cu teorema celor 3 perpendiculare obținem $d(M, OX) = 2\sqrt{13}$ 1p

$d(M, OY) = 13$ 1p

b) Construcții ajutătoare sau notarea unui segment cu o necunoscută 1p

Calculează OA sau OM în două moduri şi egalează rezultatele 3p

Calculează $OM = 2\sqrt{61}$ 1p