

Examenul de bacalaureat național 2017

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Se consideră numerele complexe $z_1 = 5 + 2i$ și $z_2 = 3 - 3i$. Arătați că $3z_1 + 2z_2 = 21$.
- 5p 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - x + 2$. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor celor două funcții.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2+3} = 3 \cdot 3^{3x}$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 3 și cu 5.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,2)$, $B(2,4)$ și $C(m,0)$, unde m este număr real. Determinați numărul real m , știind că punctele A , B și C sunt coliniare.
- 5p 6. Calculați lungimea laturii BC a triunghiului ABC , știind că $AB = 4$, $AC = 8$ și $A = \frac{\pi}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 2-x & 0 & x-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2(1-x) & 0 & 2x-1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

- 5p a) Arătați că $\det(A(2)) = 2$.
- 5p b) Demonstrați că $\det(A(x)A(-x)) \leq 0$, pentru orice număr real x .
- 5p c) Arătați că, dacă numerele naturale m și n verifică relația $A(m)A(n) = A(2)$, atunci $m + n = 3$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 + 2X^2 + aX + 1$, unde a este număr real.
- 5p a) Determinați numărul real a , știind că $f(1) = 0$.
- 5p b) Pentru $a = 2$, calculați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X^2 + X + 1$.
- 5p c) Determinați numerele reale a pentru care rădăcinile polinomului f au modulele egale.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - 1 - \ln(x+2)$.

- 5p a) Arătați că $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+2}$, $x \in (-2, +\infty)$.
- 5p b) Demonstrați că funcția f este convexă pe $(-2, +\infty)$.
- 5p c) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n = \int_1^e x \ln^n x dx$.

- 5p a) Arătați că $\int_1^e x dx = \frac{e^2 - 1}{2}$.
- 5p b) Demonstrați că $I_{n+1} \leq I_n$, pentru orice număr natural nenul n .
- 5p c) Demonstrați că $2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2$, pentru orice număr natural nenul n .

Examenul de bacalaureat național 2017

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$3z_1 + 2z_2 = 3(5 + 2i) + 2(3 - 3i) = 15 + 6i + 6 - 6i = 15 + 6 = 21$	3p 2p
2.	$x + 1 = x^2 - x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$ $x = 1$	2p 3p
3.	$3^{x^2+3} = 3^{1+3x} \Leftrightarrow x^2 + 3 = 1 + 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$ $x = 1$ sau $x = 2$	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile Mulțimea numerelor naturale de două cifre, care sunt divizibile cu 3 și cu 5, are 6 elemente, deci sunt 6 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$	2p 2p 1p
5.	Ecuția dreptei AB este $y = x + 2$ Punctul C aparține dreptei $AB \Leftrightarrow m = -2$	2p 3p
6.	$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = 16 + 64 - 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 48$ $BC = 4\sqrt{3}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2)) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - (-2) - 0 - 0 = 2$	3p 2p
b)	$A(x)A(-x) = \begin{pmatrix} 2+x^2 & 0 & -x^2-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2+2x^2 & 0 & -2x^2-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(x)A(-x)) = \begin{vmatrix} 2+x^2 & 0 & -x^2-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2+2x^2 & 0 & -2x^2-1 \end{vmatrix} = (x^2+2)(-2x^2-1) - (-x^2-1)(2x^2+2) = -x^2 \leq 0$, pentru orice număr real x	3p 2p
c)	$A(m)A(n) = \begin{pmatrix} 2-mn & 0 & mn-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2(1-mn) & 0 & 2mn-1 \end{pmatrix} = A(mn)$ $A(mn) = A(2)$, deci $mn = 2$ și, cum m și n sunt numere naturale, obținem $m + n = 3$	3p 2p
2.a)	$f(1) = 0 \Leftrightarrow 1^3 + 2 \cdot 1^2 + a \cdot 1 + 1 = 0$ $a = -4$	2p 3p

b)	$f = X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ și câtul este $X + 1$ Restul este 0	3p 2p
c)	$x_1 x_2 x_3 = -1$ și $ x_1 = x_2 = x_3 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 1$ Cum f are cel puțin o rădăcină reală, una dintre rădăcini este egală cu -1 sau cu 1 Dacă $x_1 = -1$, obținem $f(-1) = 0$, deci $a = 2$, ceea ce convine, deoarece $ x_2 = x_3 = 1$ Dacă $x_1 = 1$, obținem $f(1) = 0$, deci $a = -4$, ceea ce nu convine, deoarece $ x_2 \neq x_3 $	2p 1p 1p 1p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = (e^x)' - 1' - (\ln(x+2))' =$ $= e^x - 0 - \frac{(x+2)'}{x+2} = e^x - \frac{1}{x+2}, x \in (-2, +\infty)$	2p 3p
b)	$f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+2)^2}, x \in (-2, +\infty)$ $f''(x) \geq 0$, deci funcția f este convexă pe $(-2, +\infty)$	2p 3p
c)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+2)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+2} = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x - 1}{x} - \frac{\ln(x+2)}{x} \right) = +\infty$	2p 2p 1p
2.a)	$\int_1^e x dx = \frac{x^2}{2} \Big _1^e =$ $= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e^2 - 1}{2}$	3p 2p
b)	$x \in [1, e] \Rightarrow 0 \leq \ln x \leq 1 \Rightarrow \ln x - 1 \leq 0$ $I_{n+1} - I_n = \int_1^e x \ln^n x (\ln x - 1) dx \leq 0$, deci $I_{n+1} \leq I_n$, pentru orice număr natural nenul n	2p 3p
c)	$I_{n+1} = \int_1^e x \ln^{n+1} x dx = \frac{x^2}{2} \ln^{n+1} x \Big _1^e - \frac{n+1}{2} \int_1^e x \ln^n x dx =$ $= \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$, deci $2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2$, pentru orice număr natural nenul n	3p 2p