

Examenul de bacalaureat național 2017

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră numărul complex $z = 2 + i$. Arătați că $z + \bar{z} + z\bar{z} = 9$, unde \bar{z} este conjugatul lui z .
- 5p** 2. Determinați numărul real m , știind că punctul $A(1, m)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x - 3$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(1 - \log_2 x)(2 - \log_2 x) = 0$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor strict mai mică decât cifra unităților.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3, 1)$, $B(3, 3)$ și $C(0, 2)$. Determinați lungimea medianei din C a triunghiului ABC .
- 5p** 6. Arătați că $(1 + \operatorname{tg}^2 x) \cos^2 x - (1 + \operatorname{ctg}^2 x) \sin^2 x = 0$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + az = 0 \\ -2x - y + 3z = 0 \end{cases}$, unde a este număr real.

- 5p** a) Arătați că $\det(A(9)) = 0$.
- 5p** b) Determinați valorile reale ale lui a pentru care sistemul are soluție unică.
- 5p** c) Demonstrați că, dacă sistemul are soluția (x_0, y_0, z_0) , cu x_0, y_0 și z_0 numere reale nenule, atunci $-x_0 + y_0 + z_0 = 11(x_0 + y_0 + z_0)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 7x + 7y + 42$.
- 5p** a) Arătați că $x \circ y = (x + 7)(y + 7) - 7$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p** b) Determinați numerele reale x , știind că $x \circ x = x$.
- 5p** c) Determinați numărul real a , știind că $2017^a \circ (-6) = 1$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{1-x}$.

- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{1-x+x \ln x}{x(1-x)^2}$, $x \in (1, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că $x \ln x > x - 1$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + 3x^2$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^1 (f(x) - 3x^2) dx = e - 1$.
- 5p** b) Arătați că $\int_0^1 x f(x) dx = \frac{7}{4}$.
- 5p** c) Determinați numărul natural nenul n , pentru care suprafața plană delimitată de graficul funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - e^x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = n$ are aria egală cu $n^2 - n + 1$.

Examenul de bacalaureat național 2017

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z + \bar{z} + z\bar{z} = 2 + i + 2 - i + (2 + i)(2 - i) =$ $= 4 + 4 - i^2 = 9$	3p 2p
2.	$f(1) = m \Rightarrow 1 + 2 - 3 = m$ $m = 0$	3p 2p
3.	$1 - \log_2 x = 0$ sau $2 - \log_2 x = 0$ $x = 2$ sau $x = 4$, care convin	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile Mulțimea numerelor naturale de două cifre, care au cifra zecilor strict mai mică decât cifra unităților are 36 de elemente, deci sunt 36 de cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{36}{90} = \frac{2}{5}$	2p 2p 1p
5.	$M(3, 2)$, unde punctul M este mijlocul segmentului AB $CM = 3$	3p 2p
6.	$(1 + \text{tg}^2 x) \cos^2 x - (1 + \text{ctg}^2 x) \sin^2 x = \left(1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right) \cos^2 x - \left(1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) \sin^2 x =$ $= \cos^2 x + \sin^2 x - (\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(9) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 9 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(9)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 9 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$ $= 6 + (-2) + (-18) - (-8) - (-9) - 3 = 0$	2p 3p
b)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - a$ Sistemul are soluție unică $\Leftrightarrow \det(A(a)) \neq 0$, deci $a \in \mathbb{R} \setminus \{9\}$	3p 2p
c)	Sistemul are soluția (x_0, y_0, z_0) , cu x_0, y_0 și z_0 numere reale nenule, deci $a = 9$ și soluția sistemului este de forma $(5\alpha, -7\alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ $-x_0 + y_0 + z_0 = -5\alpha + (-7\alpha) + \alpha = -11\alpha = 11(5\alpha + (-7\alpha) + \alpha) = 11(x_0 + y_0 + z_0)$	3p 2p
2.a)	$x \circ y = xy + 7x + 7y + 49 - 7 =$ $= x(y + 7) + 7(y + 7) - 7 = (x + 7)(y + 7) - 7$, pentru orice numere reale x și y	2p 3p

b)	$x \circ x = (x+7)^2 - 7$, deci $(x+7)^2 - 7 = x$ $(x+7)(x+6) = 0 \Leftrightarrow x = -7$ sau $x = -6$	2p 3p
c)	$(2017^a + 7)(-6+7) - 7 = 1 \Leftrightarrow 2017^a + 7 - 7 = 1$ $2017^a = 1 \Leftrightarrow a = 0$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot (1-x) - \ln x \cdot (-1)}{(1-x)^2} =$ $= \frac{\frac{1-x}{x} + \ln x}{(1-x)^2} = \frac{1-x+x \ln x}{x(1-x)^2}, x \in (1, +\infty)$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = 0$ Dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	3p 2p
c)	$g: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x \ln x - x + 1 \Rightarrow g'(x) = \ln x$, deci $g'(x) > 0$ pentru orice $x \in (1, +\infty)$ Funcția g este strict crescătoare pe $(1, +\infty)$ și, cum $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$, obținem $g(x) > 0$, deci $x \ln x > x - 1$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$	3p 2p
2.a)	$\int_0^1 (f(x) - 3x^2) dx = \int_0^1 (e^x + 3x^2 - 3x^2) dx = \int_0^1 e^x dx =$ $= e^x \Big _0^1 = e - 1$	2p 3p
b)	$\int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 (x e^x + 3x^3) dx = (x-1)e^x \Big _0^1 + \frac{3x^4}{4} \Big _0^1 =$ $= 1 \cdot e^0 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$	3p 2p
c)	$g(x) = 3x^2 \Rightarrow \mathcal{A} = \int_0^n g(x) dx = \int_0^n 3x^2 dx = x^3 \Big _0^n = n^3$ $n^3 = n^2 - n + 1 \Leftrightarrow (n-1)(n^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow n = 1$	3p 2p