Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 + 2i$ și $z_2 = 3 - 2i$. Arătați că numărul $z_1 + z_2$ este real.
5p	**2.** Determinaţi numărul real m, știind că punctul $M(2, m)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{3x-5} = 3^{-2}$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$, acesta să fie multiplu de 5.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,5)$, $B(1,3)$ și $C(m,1)$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că punctul C aparține dreptei AB.
5p	**6.** Se consideră $E(x) = \cos\frac{x}{2} + \sin x$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & x+1 & 1 \\ 2 & x & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(0)) = 1$.
5p	**b)** Determinați numărul real x, pentru care $A(x) + A(x+2) = 2A(2)$.
5p	**c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(n, n+1)$, $N(2, n)$ și $P(3,0)$. Determinați numărul natural n, știind că punctele M, N și P sunt coliniare.
	2. Se consideră polinomul $f = X^3 + aX^2 + X - 1$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $f(1) - f(-1) = 4$, pentru orice număr real a.
5p	**b)** Pentru $a = 2$, calculați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X^2 + X + 1$.
5p	**c)** Determinați numărul real a pentru care $x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = x_1x_2x_3 - 1$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x \in (1,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 2$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{e^x + 1} = 0$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = e^x + 2x$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^1 (f(x) - 2x)\,dx = e - 1$.
5p	**b)** Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - e^x$.
5p	**c)** Determinați numărul real a, știind că $\int_0^a x f(x)\,dx = 1 + \frac{2a^3}{3}$.

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z_1+z_2=(3+2i)+(3-2i)=$	**2p**
	$=6$, care este număr real	**3p**
2.	$f(2)=m \Leftrightarrow 4-3=m$	**3p**
	$m=1$	**2p**
3.	$3^{3x-5}=3^{-2} \Leftrightarrow 3x-5=-2$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Mulțimea A are 20 de elemente, deci sunt 20 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea A, multiplii de 5 sunt numerele 5, 10, 15 și 20, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$	**1p**
5.	Ecuația dreptei AB este $y=2x+1$	**3p**
	$C\in AB \Leftrightarrow 1=2m+1 \Leftrightarrow m=0$	**2p**
6.	$E\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{3}=$	**2p**
	$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}0&1&1\\2&0&1\\3&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}0&1&1\\2&0&1\\3&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+3-0-0-2=1$	**3p**
b)	$A(x)+A(x+2)=\begin{pmatrix}x&x+1&1\\2&x&1\\3&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x+2&x+3&1\\2&x+2&1\\3&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+2&2x+4&2\\4&2x+2&2\\6&0&2\end{pmatrix}$	**2p**
	$2A(2)=\begin{pmatrix}4&6&2\\4&4&2\\6&0&2\end{pmatrix}$, deci $x=1$	**3p**
c)	Punctele $M(n,n+1)$, $N(2,n)$ și $P(3,0)$ sunt coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix}n&n+1&1\\2&n&1\\3&0&1\end{vmatrix}=0$	**2p**
	$n^2-2n+1=0$, deci $n=1$	**3p**
2.a)	$f(1)=1^3+a\cdot 1^2+1-1=a+1$	**2p**
	$f(-1)=(-1)^3+a\cdot(-1)^2+(-1)-1=a-3 \Rightarrow f(1)-f(-1)=a+1-a+3=4$, pentru orice număr real a	**3p**

b)	$f = X^3 + 2X^2 + X - 1$, câtul este $X + 1$ Restul este $-X - 2$	**3p** **2p**
c)	$x_1 + x_2 + x_3 = -a$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1$, $x_1x_2x_3 = 1$ $x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = x_1x_2x_3 - 1 \Leftrightarrow -a + 1 = 1 - 1$, deci $a = 1$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \dfrac{(2x-1)(x-1) - \left(x^2 - x + 1\right)\cdot 1}{(x-1)^2} =$ $= \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x \in (1, +\infty)$	**3p** **2p**
b)	$f(2) = 3$, $f'(2) = 0$ Ecuația tangentei este $y - f(2) = f'(2)(x-2)$, adică $y = 3$	**2p** **3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{e^x + 1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - x + 1}{(x-1)\left(e^x + 1\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2 - x + 1}{x(x-1)} \cdot \dfrac{x}{e^x + 1}\right) =$ $= 1 \cdot 0 = 0$, deoarece $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - x + 1}{x(x-1)} = 1$ și $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x + 1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$	**2p** **3p**
2.a)	$\int_0^1 \left(f(x) - 2x\right) dx = \int_0^1 \left(e^x + 2x - 2x\right) dx = \int_0^1 e^x\, dx = e^x \Big\|_0^1 =$ $= e^1 - e^0 = e - 1$	**3p** **2p**
b)	$g(x) = 2x \Rightarrow V = \pi \int_0^1 g^2(x)\, dx = \pi \int_0^1 4x^2\, dx =$ $= 4\pi \cdot \dfrac{x^3}{3} \Big\|_0^1 = \dfrac{4\pi}{3}$	**3p** **2p**
c)	$\int_0^a x f(x) dx = \int_0^a x\left(e^x + 2x\right) dx = (x-1)e^x \Big\|_0^a + 2 \cdot \dfrac{x^3}{3} \Big\|_0^a = (a-1)e^a + 1 + \dfrac{2a^3}{3}$ $(a-1)e^a + 1 + \dfrac{2a^3}{3} = 1 + \dfrac{2a^3}{3} \Leftrightarrow (a-1)e^a = 0 \Leftrightarrow a = 1$	**3p** **2p**