S. S. M. R.
Filiala Corabia

Colegiul Naţional " Al. I. Cuza"
Corabia , Olt

Concursul interjudeţean de matematică
"DANUBIUS" – 2017
Corabia , Ediţia a 11 - a .

Clasa a IX-a

<u>Subiectul I.</u>

Să se determine toate funcţiile strict crescătoare $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ $(\mathbb{N} = \{0,1,2,...\})$ cu proprietatea , $f(n-1)+f(n)+f(n+1)=3n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Conf.univ. dr. **Andrei Vernescu**

<u>Subiectul II</u>

Fie $A=\left\{\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}\sqrt{k^2-4} \mid k \in \mathbb{N},\ k \geq 2\right\}$. Aflaţi $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$, ştiind că $x_n = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ şi $x_1+x_2+\cdots+x_n+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}=2n+1$.

Prof. univ. dr. **Cristinel Mortici**

<u>Subiectul III.</u>

Să se arate că dacă :
$0 < x < y < z < \frac{\pi}{2}$
atunci ,
$(x+y)\sin z+(x-z)\sin y<(y+z)\sin x$

Profesori: **Dan Sitaru** , **Leonard Giugiuc** , Drobeta-Tr. Severin

<u>Subiectul IV.</u>

Daca $a , b , c > 0$ si $a+b+c = S$, atunci $\frac{a+b}{(1+c)^2}+\frac{b+c}{(1+a)^2}+\frac{c+a}{(1+b)^2} \geq \frac{9S}{9+S^2}$.

dr. ***Dorin Mărghidanu*** , Corabia

<u>Notă.</u> Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7 puncte.
Timp efectiv de lucru 3 ore.

S. S. M. R. **Colegiul Naţional " Al. I. Cuza"**
Filiala Corabia **Corabia , Olt**

Concursul interjudeţean de matematică
"DANUBIUS" – 2017
Corabia, Ediţia a 11 - a .

Clasa a IX-a - Barem de corectare -

Subiectul I.

Să se determine toate funcţiile strict crescătoare $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ ($\mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$) cu proprietatea , $f(n-1)+f(n)+f(n+1)=3n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Conf.univ. dr. **Andrei Vernescu**

Solutie :

Introducând în egalitatea din enunţ $n=1$, se obţine

$$f(0)+f(1)+f(2)=3.$$

Valorile $f(0), f(1)$ şi $f(2)$ sunt numere naturale ordonate strict crescător

$$(f(0)<f(1)<f(2)),$$

deoarece funcţia f este strict crescătoare. Rezultă că $f(0)=0, f(1)=1$ şi $f(2)=2$.

Acest rezultat parţial sugerează că ar avea loc egalitatea

$$f(n)=n, \forall n \in \mathbf{N},$$

pe care o notăm $P(n)$ şi pe care o vom demonstra prin inducţie matematică. Etapa de verificare a fost parcursă, pentru $n=1, n=2$ şi $n=3$.

Fie acum $n \in \mathbf{N}$, oarecare, $n>3$ şi să presupunem că proprietatea este adevărată pentru $1,2,3,...,n-1,n$. Egalitatea din enunţ ne dă

$$(n-1)+n+f(n+1)=3n,$$

de unde $f(n+1)=n+1$. □

Subiectul II

Fie $A=\left\{\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}\sqrt{k^2-4} \mid k \in \mathbb{N},\ k \geq 2\right\}$. Aflați $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$, știind că $x_n = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ și $x_1+x_2+\cdots+x_n+\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}=2n+1$.

Prof. univ. dr. **Cristinel Mortici**

Soluție:

Dacă $x \in A$, atunci $x+\frac{1}{x}=k \geq 2$. Notăm $x_i+\frac{1}{x_i}=k_i$. Rezultă

$k_1+k_2+\cdots+k_n=2n+1$, deci $k_1=k_2=\cdots=k_{n-1}=2$ și $k_n=3$.

Obținem $x_1=\cdots=x_{n-1}=1$ și $x_n=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Subiectul III.

Să se arate că dacă :

$0 < x < y < z < \frac{\pi}{2}$, **atunci** ,

$(x + y)\sin z + (x - z)\sin y < (y + z)\sin x$

Profesori: **Dan Sitaru** , **Leonard Giugiuc** , Drobeta Tr. Severin

Soluție:

$$\frac{\sin y}{y} - \frac{\sin x}{x} = \frac{x\sin y - y\sin x}{xy} =$$

$$= \frac{x\sin y - x\sin x - y\sin x + x\sin x}{xy} =$$

$$= \frac{x(\sin y - \sin x) - (y - x)\sin x}{xy} =$$

$$= \frac{y - x}{xy}\left[x\frac{\sin y - \sin x}{x - y} - \sin x\right] =$$

$$= \frac{y - x}{xy}\left[2x\frac{\sin\frac{y - x}{2}\cos\frac{y + x}{2}}{y - x} - \sin x\right] <$$

$$< \frac{y - x}{xy}\left[x\cos\frac{y + x}{2} - \sin x\right] <$$

$$< \frac{y - x}{xy}(x\cos x - \sin x) = \frac{y - x}{xy}\cos(x - \operatorname{tg} x) < 0$$

deoarece $y > x; x < \operatorname{tg} x$

$$\frac{\sin y}{y} - \frac{\sin x}{x} < 0 \Rightarrow x\sin y < y\sin x$$

Analog:

$y\sin z < z\sin y$, $x\sin z < z\sin x$

Prin adunare:

$x(\sin y + \sin z)y\sin z < y\sin x + z(\sin y + \sin x)$

$(x + y)\sin z + x\sin y < (x + z)\sin x + z\sin y$

$(x + y)\sin z + (x - z)\sin y < (y + z)\sin x$

Subiectul IV.

Daca $a, b, c > 0$ si $a+b+c = S$, atunci $\frac{a+b}{(1+c)^2} + \frac{b+c}{(1+a)^2} + \frac{c+a}{(1+b)^2} \geq \frac{9S}{9+S^2}$.

dr. ***Dorin Mărghidanu***, Corabia

Solutie:

Lema. Dacă $x, y > 0$, atunci : $\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{1}{1+xy}$

Demonstratie. Avem cu inegalitatea C-B-S:

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+y\right) \geq (1+y)^2 ; \; (y+x)\left(\frac{1}{y}+x\right) \geq (1+x)^2$$

Deci,

$$\frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{1}{(x+y)\left(\frac{1}{y}+x\right)} + \frac{1}{(x+y)\left(\frac{1}{x}+y\right)} = \frac{1}{x+y} \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{y}+x} + \frac{1}{\frac{1}{x}+y}\right) = \frac{1}{x+y} \cdot \left(\frac{x}{1+xy} + \frac{y}{1+x}\right) = \frac{1}{x+y} \cdot \frac{x+y}{1+xy} = \frac{1}{1+xy}.$$

Egalitatea se obtine daca $\frac{x}{\frac{1}{x}} = \frac{y}{y} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$, respectiv $y = 1$

Din lema, rezulta : $\frac{a}{(1+b)^2} + \frac{a}{(1+c)^2} \geq \frac{a}{1+bc}$;

$\frac{b}{(1+c)^2} + \frac{b}{(1+a)^2} \geq \frac{b}{1+ca}$;

$\frac{c}{(1+a)^2} + \frac{c}{(1+b)^2} \geq \frac{c}{1+ab}$.

Prin adunarea acestor 3 inegalitati

$$\Rightarrow \frac{a+b}{(1+c)^2} + \frac{b+c}{(1+a)^2} + \frac{c+a}{(1+b)^2} \geq \frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} =$$

$$\frac{a^2}{a+abc} + \frac{b^2}{b+abc} + \frac{c^2}{c+abc} \geq^{Bergstrom} \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+3abc} = \frac{S^2}{S+3P} \geq \frac{S^2}{S+3\cdot\left(\frac{S^3}{3}\right)} = \frac{S}{1+\frac{S^2}{9}} = \frac{9S}{9+S^2}$$

Egalitatea se obtine cand S=3 si a=b=c=1.