S. S. M. R. **Colegiul Naţional " Al. I. Cuza"**
Filiala Corabia **Corabia , Olt**

Concursul interjudeţean de matematică
"DANUBIUS" – 2017
Corabia , Ediţia a 11-a

Clasa a X-a

Subiectul I.

a) Să se dea un exemplu de număr complex **z** nereal şi care nu este pur imaginar, pentru care toate puterile naturale $\mathbf{z}^{n}$ (cu $n \in \mathbf{N}^*$) sunt, de asemenea nereale şi nici pur imaginare.

b) Să se arate că există o infinitate de astfel de numere.

Conf.univ. dr. **Andrei Vernescu**

Subiectul II

Fie a, b *si* c *numere complexe distincte astfel incat* $|a| = |b| = |c| = 1$ *si* $|a+b+c| < 1$.

Demonstrati ca $\left|\frac{a-b}{a+b}\right| + \left|\frac{b-c}{b+c}\right| + \left|\frac{c-a}{c+a}\right| = \left|\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right|$.

Autori: Leonard Giugiuc, Romania si Kadir Altintas, Turcia

Subiectul III.

Pentru $\boldsymbol{x} > \mathbf{0}$, $\boldsymbol{n} \in \mathbf{N}$, *demonstrati inegalitatea* :

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n} - x^{n} - \frac{1}{x^{n}} \geq 2^{n} - 2 \quad .$$

Prof. **Marian Dincă** , Bucuresti

Subiectul IV.

. Rezolvati in $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x+7} = \sqrt[5]{x+242}$.

Profesori: **Nicolae Tomescu** (Corabia), **Lucian Tutescu** (Craiova)

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7 puncte.
Timp efectiv de lucru 3 ore.

S. S. M. R. **Colegiul Naţional " Al. I. Cuza"**
Filiala Corabia **Corabia , Olt**

Concursul interjudeţean de matematică
"DANUBIUS" – 2017
Corabia , Ediţia a 11-a

- Barem de corectare - Clasa a X-a

Subiectul I.

a) Să se dea un exemplu de număr complex **z** nereal şi care nu este pur imaginar, pentru care toate puterile naturale $\mathbf{z}^n$ (cu $n \in \mathbf{N}^*$) sunt, de asemenea nereale şi nici pur imaginare.
b) Să se arate că există o infinitate de astfel de numere.

Conf.univ. dr. **Andrei Vernescu**

Solutie : a) Fie $z = \cos \pi\sqrt{2} + i \sin \pi\sqrt{2}$. Acest număr complex scris sub forma trigonometrică este exprimat cu argument redus, deoarece $0 \le \pi\sqrt{2} < 2\pi$ şi nu este real, pentru că argumentul său diferă de 0 şi π, precum şi nici pur imaginar, pentru că argumentul său diferă de $\pi/2$ şi de $3\pi/2$. Pentru orice număr $n \in \mathbf{N}^*$, avem, în baza formulei lui Moivre

$$z^n = \cos n\pi\sqrt{2} + i \sin n\pi\sqrt{2}.$$

Această putere a lui z nu poate fi un număr real şi nici un număr pur imaginar. Într-adevăr, dacă numărul z^n ar fi real, ar exista $k \in \mathbf{Z}$, astfel încât $n\pi\sqrt{2} = k\pi$, de unde $\sqrt{2} = \dfrac{k}{n}$, egalitate imposibilă, deoarece numărul $\sqrt{2}$ este iraţional.

Analog, dacă numărul z^n ar fi pur imaginar, ar exista $k \in \mathbf{Z}$, astfel încât $n\pi\sqrt{2} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$,de unde

$\sqrt{2} = \dfrac{\frac{1}{2} + k}{n}$, din nou egalitate imposibilă.

Aşadar, toate puterile naturale ale lui z, cu exponent nenul sunt nereale şi nici pur imaginare.
b) În construirea numărului precedent s-a utilizat numărul iraţional $\sqrt{2}$. Construcţia poate fi efectuată alegând orice număr iraţional, în locul lui $\sqrt{2}$. Întrucât există o infinitate de numere iraţionale, există o infinitate de numere care îndeplinesc cerinţele din enunţ. □

Subiectul II

Fie a, b si c numere complexe distincte astfel incat $|a| = |b| = |c| = 1$ si $|a + b + c| < 1$.

Demonstrati ca $\left|\dfrac{a-b}{a+b}\right| + \left|\dfrac{b-c}{b+c}\right| + \left|\dfrac{c-a}{c+a}\right| = \left|\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right|$.

Autori: Leonard Giugiuc, Romania si Kadir Altintas, Turcia

Solutie:

Vom demonstra intai ca $(a+b)(b+c)(c+a) \neq 0$.
Intr – adevar, daca prin absurd $a + b = 0$, *atunci*
$a + b + c = c \Longrightarrow |a + b + c| = |c| = 1$, *contradictie*.
Consideram in planul complex punctele $A(a), B(b), C(c)$ *si cercul* $\omega: |w| = 1$.
Cum $A \neq B \neq C \neq A$ *si* $A, B, C \in \omega$, *deducem ca* ABC *este triunghi*.

Fie $O(0)$ *centrul lui* ω *. Conform teoremei lui Sylvester* , $H(a+b+c)$ *este ortocentrul* ΔABC .
Din ipoteza deducem ca $OH < 1$.
Daca, prin absurd, ΔABC *nu este ascutitunghic, atunci* H *nu se afla in interiorul lui* $\omega \Longrightarrow$ $OH \geq 1 > |a+b+c| = OH$ *, contradictie . Deci* ΔABC *este ascutitunghic . Avem :*
$|b-c| = BC = 2\sin A$, $|c-a| = CA = 2\sin B$, $|a-b| = AB = 2\sin C$,
$|b+c| = AH = 2\cos A$, $|c+a| = BH = 2\cos B$, $|a+b| = CH = 2\cos C$.
De unde $\left|\frac{b-c}{b+c}\right| = \tan A$, $\left|\frac{c-a}{c+a}\right| = \tan B$ *si* $\left|\frac{a-b}{a+b}\right| = \tan C$.
In concluzie,
$\left|\frac{a-b}{a+b}\right| + \left|\frac{b-c}{b+c}\right| + \left|\frac{c-a}{c+a}\right| = \tan A + \tan B + \tan C$ *si*
$\left|\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right| = \tan A \tan B \tan C$.
Cum in orice triunghi nedreptunghic ABC *avem* $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ *, deducem*
$\left|\frac{a-b}{a+b}\right| + \left|\frac{b-c}{b+c}\right| + \left|\frac{c-a}{c+a}\right| = \left|\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right|$.

Subiectul III.

Pentru $\boldsymbol{x > 0}$, $\boldsymbol{n \in \mathbf{N}}$, *demonstrati inegalitatea* :

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^n - x^n - \frac{1}{x^n} \geq 2^n - 2 \quad .$$

Prof. **Marian Dincă** , Bucuresti

Soluția 1 **(prin inducție) :** În cazul $n = 0, 1, 2$, avem egalitate.

Pentru: $n = 3$, avem: $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 - x^3 - \frac{1}{x^3} = 3\cdot x + 3\cdot\frac{1}{x} = 3\left(x+\frac{1}{x}\right) \geq 6 = 2^3 - 2$; deoarece: $x+\frac{1}{x} \geq 2$.

Presupunem că inegalitatea este adevărată pentru n şi o demonstrăm pentru $n+1$.

Fie: $f(n) = \left(x+\frac{1}{x}\right)^n - x^n - \frac{1}{x^n} \geq 2^n - 2 \Rightarrow f(n)\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right) = \left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^n - x^n - \frac{1}{x^n}\right]\left(x+\frac{1}{x}\right) =$

$= \left(x+\frac{1}{x}\right)^{n+1} - x^{n+1} - \frac{1}{x^{n+1}} - x^{n-1} - \frac{1}{x^{n-1}}$ aşa că: $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n+1} - x^{n+1} - \frac{1}{x^{n+1}} = f(n)\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right) + x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}$,

deci: $f(n+1) = f(n)\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right) + x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}$.

Folosind acum inegalitatea mediilor, sau inegalitaţile: $x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}} \geq 2$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$, obţinem că:

$$f(n)\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right) + x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}} \geq f(n)\cdot 2 + 2 \geq \left(2^n - 2\right)2 + 2 = 2^{n+1} - 4 + 2 = 2^{n+1} - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f(n+1) \geq 2^{n+1} - 2. \blacksquare$$

Soluția a 2-a: Dezvotând după formula binomului lui NEWTON, avem:

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1}\cdot\frac{1}{x} + C_n^2 x^{n-2}\left(\frac{1}{x}\right) + \ldots + C_n^k x^{n-k}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^k + \ldots + \left(\frac{1}{x}\right)^n$ şi ţinând seama de faptul că:

$C_n^k = C_n^{n-k} = \dfrac{C_n^k + C_n^{n-k}}{2}$, obţinem: $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^n - x^n - \dfrac{1}{x^n} = \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k x^{n-k} \cdot \left(\dfrac{1}{x}\right)^k$. (1)

Grupând acum termenii din membrul drept al relaţiei (1), doi câte doi, de forma:

$$C_n^k x^{n-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k + C_n^{n-k} x^k \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{n-k} = \left(\frac{C_n^k + C_n^{n-k}}{2}\right)\left[x^{n-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k + x^k \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{n-k}\right]$$

şi ţinând seama de faptul că: $x^{n-k}\left(\dfrac{1}{x}\right)^k + x^k \cdot \left(\dfrac{1}{x}\right)^{n-k} = x^{n-2k} + \dfrac{1}{x^{n-2k}} \geq 2\sqrt{x^{n-2k} \cdot \dfrac{1}{x^{n-2k}}} = 2$, obţinem:

$$\sum_{k=1}^{n-1} C_n^k x^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^k \geq \sum \left(\frac{C_n^k + C_n^{n-k}}{2}\right) \cdot 2 = \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k = 2^n - 2. \blacksquare$$

Subiectul IV.

Rezolvati in $\mathbb{R}$ ecuatia $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x+7} = \sqrt[5]{x+242}$.

Profesori: **Nicolae Tomescu** (Corabia) , **Lucian Tutescu** (Craiova)

Solutie :

Evident $x \geqslant 0$ .Dovedim ca $x = 1$ este solutie unica . Ridicam relatia la puterea a 5-a . Rezulta ,

$$\left(\sqrt{x}\right)^5 + 5\left(\sqrt{x}\right)^4 \sqrt[3]{x+7} + 10\left(\sqrt{x}\right)^3 \left(\sqrt[3]{x+7}\right)^2 + 10\left(\sqrt{x}\right)^2 \left(\sqrt[3]{x+7}\right)^3 +$$
$$5\left(\sqrt{x}\right)\left(\sqrt[3]{x+7}\right)^4 + \left(\sqrt[3]{x+7}\right)^5 = x + 242 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad 5\left(\sqrt{x}\right)^4 \sqrt[3]{x+7} + 10\left(\sqrt{x}\right)^3 \left(\sqrt[3]{x+7}\right)^2 + 10\left(\sqrt{x}\right)^2 \left(\sqrt[3]{x+7}\right)^3 +$$
$$5\left(\sqrt{x}\right)\left(\sqrt[3]{x+7}\right)^4 + \left(\sqrt[3]{x+7}\right)^5 = 242 \quad .$$

Notam cu **E(*x*)** expresia din membrul sting din ultima ecuatie.
Pentru $x < 1$, avem **E(*x*)** < 242 , iar pentru $x > 1$, avem **E(*x*)** > 242 .