S. S. M. R.
Filiala Corabia

Colegiul Naţional " Al. I. Cuza"
Corabia , Olt

Concursul interjudeţean de matematică
"DANUBIUS" – 2017
Corabia, Ediţia a 11-a

Clasa a XI-a

Subiectul I.

Se consideră numerele strict pozitive $a, a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, astfel încât are loc inegalitatea

$$a^x + n - 1 \geq a_1^x + a_2^x + ... + a_n^x, \ \forall x \in \mathbf{R}.$$

Să se arate că $a = a_1 a_2 a_3 \cdot ... \cdot a_n$.

Conf.univ. dr. **Andrei Vernescu**

Subiectul II

Fie $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ funcţii derivabile , astfel încât ,

$$\lim_{x\to\infty} \left(g(x) \ln f(x) - x \right) = \infty \ .$$

Demonstraţi ca există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$g'(c) \ln f(c) - g(c) \cdot \frac{f'(c)}{f(c)} > 1 \ .$$

Prof. univ. dr. **Cristinel Mortici**

Subiectul III.

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ şi $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$f(X) = AXA + XAX$. Arătaţi ca f nu este injectivă .

Prof. **Ion Nedelcu**, Ploiesti

Subiectul IV.

Fie $A \in M_2(\mathbb{C})$, o matrice care verfică egalitatea $A^4 + 5A^2 + tr(A)A = 5A^3 + \det(A)\, I_2$.
Să se determine trA.

student **Luigi-Ionuţ Catană**

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7 puncte.
Timp efectiv de lucru 3 ore.

S. S. M. R. **Colegiul Naţional " Al. I. Cuza"**
Filiala Corabia **Corabia , Olt**

Concursul interjudeţean de matematică
"DANUBIUS" – 2017
Corabia, Ediţia a 11-a

Clasa a XI-a - Barem de corectare –

Subiectul I.

Se consideră numerele strict pozitive $a, a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, astfel încât are loc inegalitatea

$$a^x + n - 1 \geq a_1^x + a_2^x + ... + a_n^x , \ \forall x \in \mathbf{R}.$$

Să se arate că $a = a_1 a_2 a_3 \cdot ... \cdot a_n$.

Conf.univ. dr. **Andrei Vernescu**

Solutie :

Inegalitatea este echivalentă cu

$$a^x - 1 \geq (a_1^x - 1) + (a_2^x - 1) + (a_3^x - 1) + ... + (a_n^x - 1) , \forall x \in \mathbf{R}.$$

Pentru $x > 0$, se obţine

$$\frac{a^x - 1}{x} \geq \frac{a_1^x - 1}{x} + \frac{a_2^x - 1}{x} + ... + \frac{a_n^x - 1}{x}, \qquad (1)$$

deci, trecând la limită pentru x tinzând spre zero prin valori pozitive, adică având în vedere limita la stânga, se obţine , $\ln a \geq \ln a_1 + \ln a_2 + \ln a_3 + ... + \ln a_n$, adică , $\ln a \geq \ln a_1 a_2 a_3 ... a_n$,
de unde, în baza monotoniei funcţiei logaritm natural,

$$a \geq a_1 a_2 a_3 ... a_n \qquad (1')$$

Analog, pentru $x < 0$ se obţine inegalitatea de sens contrar lui (1), adică

$$\frac{a^x - 1}{x} \leq \frac{a_1^x - 1}{x} + \frac{a_2^x - 1}{x} + ... + \frac{a_n^x - 1}{x} \qquad (2)$$

de unde, prin considerarea limitei pentru x tinzând spre zero prin valori negative, adică având în vedere limita la dreapta, iar apoi procedând analog, se obţine inegalitatea

$$a \leq a_1 a_2 a_3 ... a_n. \qquad (2')$$

Din inegalităţile (1') si (2') rezultă prin antisimetrie, egalitatea cerută. □

Subiectul II

Fie $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty)$ functii derivabile , astfel incat ,

$$\lim_{x\to\infty} \left(g(x) \ln f(x) - x \right) = \infty \ .$$

Demonstrati ca exista $c \in \mathbb{R}$ astfel incat

$$g'(c) \ln f(c) - g(c) \cdot \frac{f'(c)}{f(c)} > 1 \ .$$

Prof. univ. dr. **Cristinel Mortici**

Solutie. Prin absurd,

$$g' \ln f + g\frac{f'}{f} \leq 1.$$

Rezulta

$$f^g\left(g' \ln f + g\frac{f'}{f}\right) \leq f^g \Rightarrow (f^g)' \leq f^g \Rightarrow (\ln f^g)' \leq 1,$$

deci $h(x) = g \ln f - x$ descr. In acest fel, ea nu poate avea limita ∞ la ∞.

Subiectul III.

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ şi $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$f(X) = AXA + XAX$. Aratati ca f nu este injectivă .

Prof. $\boxed{\textbf{Ion Nedelcu}}$, Ploiesti

Solutie

- Daca $A = O_n \Rightarrow f(X) = O_n \Rightarrow f$ nu este injectivă .
- Daca $A \neq O_n$, fie $\omega \in \mathbb{C}$ cu $\omega^3=1$ şi $\omega \neq 1$.

Cum : $f(\omega A) = \omega A^3 + \omega^2 A^3$ şi

$f(\omega^2 A) = \omega^2 A^3 + \omega A^3$.

Din $\omega A \neq \omega^2 A$ şi $f(\omega A) = f(\omega^2 A) \Rightarrow f$ nu este injectivă .

Subiectul IV.

Fie $A \in M_2(\mathbb{C})$, matrice care verfică egalitatea $A^4 + 5A^2 + tr(A)A = 5A^3 + \det(A)\, I_2$.
Să se determine trA .

student **Luigi-Ionuţ Catană**

Soluţie. Din enunţ avem $A^4 - 5A^3 + 4A^2 = A^2 - tr(A)A + \det(A)\, I_2$. Dar conform teoremei lui Hamilton-Cayeley avem $A^2 \quad tr(A)A \mid \det(A)\, I_2 = O_2$.
Rezultă că $A^4 - 5A^3 + 4A^2 = O_2$ sau $A^2(A^2 - 5A + 4I_2) = O_2$.

Dacă $\det(A) \neq 0$ atunci $A^2 - 5A + 4I_2 = O_2$, de unde avem că dacă $A = aI_2$ atunci avem , $a^2 - 5a + 4 = 0$ de unde $a = 2$ sau $a = 3$. Deci $tr(A) = 4$ sau $trA = 6$.

Dacă $A \neq aI_2$, aunci identificând coeficienţii egalităţii $A^2 - 5A + 4I_2 = O_2$ obţinem $trA = 5$.

Dacă det(A)=0 atunci avem conform Hamilton-Cayley ,
$A^2 = tr(A)A \Longrightarrow A^3 = tr(A)^2 A \Longrightarrow A^4 = tr(A)^3 A$. Notam $trA = t$. Din ipoteză obţinem , $t^2(t^2 - 5t + 4) = 0$ de unde $t = 0, t = 2$ sau $t = 3$.

Deci $trA \in \{0; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Pentru fiecare valoare a urmei se construieşte o matrice A care verifică ipotezele .