S. S. M. R.
Filiala Corabia

Colegiul Naţional " Al. I. Cuza"
Corabia , Olt

Concursul interjudeţean de matematică
"DANUBIUS" – 2017
Corabia , Ediţia a 11-a

Clasa a XII-a

Subiectul I.

Se consideră aria subgraficului funcţiei convexe $f:[n,n+1]\to\mathbf{R}_+^*$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ definita de egalitatea $f(x)=1/x$, pentru orice $x\in[0,1]$. Se minorează aria subgraficului funcţiei *f* cu aria trapezului dreptunghic determinat de axa Ox , dreptele paralele cu axa Oy de ecuaţii $x=n, x=n+1$ şi tangenta la grafic dusă printr un punct $(c,1/c)$ al graficului funcţiei, $c\in(n,n+1)$.

Să se determine poziţia punctului *c* astfel încât aria trapezului menţionat să fie cea mai mare posibilă şi să se precizeze inegalitatea obţinută.

Conf.univ. dr. **Andrei Vernescu**

Subiectul II

Fie $f = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$ si x_1 , x_2 , x_3 rădăcinile ecuației $f(x) - 0$.

a) Dacă $|a|^2 < 2|b|$, atunci există $k \in \{1,2,3\}$ astfel încât $x_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

b) Dacă $b, c > 0$ $(sau\ b, c < 0)$, atunci există $k \in \{1,2,3\}$ $astfel\ încat$ $|x_k| \le \frac{3c}{b}$.

dr. **Dorin Mărghidanu** , Corabia

Subiectul III.

Sa se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\ln n}\cdot\displaystyle\int_0^1 \dfrac{dx}{x^n+nx+1}$.

Prof. **Lucian Tuţescu** (Craiova), *dr.* **Dorin Mărghidanu** (Corabia)

Subiectul IV.

Fie $a_1, a_2, \dots, a_n \in (0,\infty)$; $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că ,

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{-1}^{1}\frac{e^{x^2}}{a_k^x+1}\,dx < ne$$

Prof. **Daniel Sitaru** , Drobeta Tr.–Severin

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7 puncte.
Timp efectiv de lucru 3 ore.

S. S. M. R. **Colegiul Naţional " Al. I. Cuza"**
Filiala Corabia **Corabia , Olt**

Concursul interjudeţean de matematică
"DANUBIUS" – 2017
Corabia, Ediţia a 11-*a*

- Barem de corectare -

Clasa a XII-a

Subiectul I.

Se consideră aria subgraficului funcţiei convexe $f:[n,n+1]\to\mathbf{R}_+^*$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ definita de egalitatea $f(x)=1/x$, pentru orice $x\in[0,1]$. Se minorează aria subgraficului funcţiei *f* cu aria trapezului dreptunghic determinat de axa *Ox*, dreptele paralele cu axa *Oy* de ecuaţii $x=n, x=n+1$ şi tangenta la grafic dusă printr un punct $(c,1/c)$ al graficului funcţiei, $c\in(n,n+1)$.

Să se determine poziţia punctului *c* astfel încât aria trapezului menţionat să fie cea mai mare posibilă şi să se precizeze inegalitatea obţinută.

Conf.univ. dr. **Andrei Vernescu**

Solutie.

a) Fie $c\in(n,n+1)$, oarecare. Notăm cu A şi respectiv B punctele de coordonate $(n,0)$ respectiv $(n+1,0)$. Ecuaţia tangentei la grafic în punctul de abscisă *c* este , $y-\frac{1}{c}=-\frac{1}{c^2}(x-c)$,

adică , $y=-\frac{1}{c^2}x+\frac{2}{c}$. Această tangentă intersectează dreptele de ecuaţii $x=n$ şi $x=n+1$

în două puncte pe care le notăm A' şi B'. Pentru $x=n$ se obţine $y_{A'}=-\frac{n}{c^2}+\frac{2}{c}$,

iar pentru $x=n+1$, $y_{B'}=-\frac{n+1}{c^2}+\frac{2}{c}$. Deci aria trapezului $ABB'A'$ este

$$S=\frac{1}{2}\left(y_{A'}+y_{B'}\right)\left((n+1)-n\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{n}{c^2}-\frac{n+1}{c^2}+\frac{4}{c}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{c}-\frac{2n+1}{c^2}\right).$$

Notăm această arie care depinde de *c* (este funcţie de *c*) cu $S(c)$. Deci $S(c)=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{c}-\frac{2n+1}{c^2}\right)$.

Aşadar , $S'(c)=\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{c^2}+\frac{2(2n+1)}{c^3}\right)=\frac{4n+2-4c}{2c^3}=\frac{2n+1-2c}{c^3}$.

Deci $S'(c)=0$ dacă şi numai dacă $c=n+1/2$. Întrucât derivata $S'(c)$ este pozitivă la stânga rădăcinii şi negativă la dreapta ei, rezultă că punctul $c=n+1/2$ este un punct de maxim. Deci $c=n+1/2$ este poziţia cerută în problemă, a punctului c pentru care aria trapezului $ABB'A'$ este maximă. Aria corespunzătoare este $S\left(\frac{1}{n+1/2}\right)=\frac{2}{2n+1}$. Întrucât aria subgraficului funcţiei *f*

este $\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx=\ln x\,|_n^{n+1}=\ln(n+1)-\ln n$, s-a obţinut inegalitatea $\ln(n+1)-\ln n>\frac{2}{2n+1}$. □

Subiectul II

Fie $f = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$ si x_1 , x_2 , x_3 rădăcinile ecuației $f(x) = 0$.

a) Dacă $|a|^2 < 2|b|$, atunci există $k \in \{1,2,3\}$ astfel încât $x_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

b) Dacă $b, c > 0$ $(sau\ b, c < 0)$, atunci există $k \in \{1,2,3\}$ $astfel\ încat$ $|x_k| \le \frac{3c}{b}$.

dr. **Dorin Mărghidanu** , Corabia

Soluție:

Cu *relațiile lui Viète* , avem:

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -a\ ;\ S_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b\ ;\ S_3 = x_1x_2x_3 = -c$$

a) Cum avem $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = S_1^2 - 2S_2 = a^2 - 2b < 0$,
rezultă că nu toate rădăcinile sunt reale.

b) Presupunem prin absurd că $|x_k| > \frac{3c}{b}$, $(\forall)\ k \in \{1,2,3\}$. Atunci ,

$$\frac{1}{|x_1|} + \frac{1}{|x_2|} + \frac{1}{|x_3|} < \frac{b}{3c} + \frac{b}{3c} + \frac{b}{3c} = \frac{b}{c} = \left|\frac{S_2}{S_3}\right| = \left|\frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right| \le \frac{1}{|x_1|} + \frac{1}{|x_2|} + \frac{1}{|x_3|} .$$ Contradicție !

Subiectul III.

Sa se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n} \cdot \int_0^1 \frac{dx}{x^n + nx + 1}$.

Prof. **Lucian Tuţescu** (Craiova) , *dr.* **Dorin Mărghidanu** (Corabia)

Soluţie:

Pentru $n \geqslant 1$ si $x \in [0,1]$, avem : $\frac{1}{nx+2} \le \frac{1}{x^n + nx + 1} \le \frac{1}{nx+1}$. Deci ,

$$\int_0^1 \frac{dx}{nx+2} \le \int_0^1 \frac{dx}{x^n + nx + 1} \le \int_0^1 \frac{dx}{nx+1}\ ,\ \text{sau}\ \frac{1}{n}\ln\frac{n+2}{2} \le \int_0^1 \frac{dx}{x^n+nx+1} \le \frac{1}{n}\ln(n+1).$$

Deci , $$\frac{\ln(n+2) - \ln 2}{\ln n} \le \frac{n}{\ln n} \cdot \int_0^1 \frac{dx}{x^n + nx + 1} \le \frac{\ln(n+1)}{\ln n}.$$

Cum : $$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+2) - \ln 2}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 ,$$

rezulta cu lema « cleştelui » , $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n} \cdot \int_0^1 \frac{dx}{x^n + nx + 1} = 1$.

Subiectul IV.

Fie $a_1, a_2, \dots, a_n \in (0,\infty);\ n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că ,

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{-1}^{1} \frac{e^{x^2}}{a_k^x + 1} dx < ne$$

Prof. **Daniel Sitaru** , Drobeta Turnu–Severin

Soluție :

Pentru $k \in \overline{1,n};\ k -$ fixat:

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^{x^2}}{a_k^x + 1} dx = \int_{-1}^{0} \frac{e^{x^2}}{a_k^x + 1} dx + \int_{0}^{1} \frac{e^{x^2}}{a_k^x + 1} dx == -\int_{1}^{0} \frac{e^{x^2}}{a_k^{-x} + 1} dx + \int_{0}^{1} \frac{e^{x^2}}{a_k^x + 1} dx =$$

$$= \int_{0}^{1} \frac{a_k^x e^{x^2}}{a_k^x + 1} dx + \int_{0}^{1} \frac{e^{x^2}}{a_k^x + 1} dx == \int_{0}^{1} \frac{e^{x^2}(a_k^x + 1)}{a_k^x + 1} dx = \int_{0}^{1} e^{x^2} dx < e$$

În prima integrală am folosit $y = -x$.

Dacă $f: [0,1] \to \mathbb{R};\ f(x) = e^{x^2}; f'(x) = 2xe^{x^2} \geq 0;\ (\forall) x \in [0,1]$ rezultă $e^{x^2} \leq e;\ (\forall) x \in [0,1]$. De aici:

$$\int_{0}^{1} e^{x^2} dx < e$$

Trecand la sumă , obtinem :

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{-1}^{1} \frac{e^{x^2}}{a_k^x + 1} dx < ne$$