Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Timişoara, 20 aprilie 2017

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a 12-a

Problema 1. Fie $f\colon [0,\infty) \to (0,\infty)$ o funcţie continuă. Arătaţi că:

(a) Există un număr natural n_0, astfel încât oricare ar fi numărul natural $n > n_0$, există un unic număr real $x_n > 0$ pentru care

$$n \int_0^{x_n} f(t)\,\mathrm{d}t = 1\,;$$

(b) Şirul $(nx_n)_{n>n_0}$ este convergent şi determinaţi limita sa.

Soluţie. **(a)** Fie $F\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Rezultă că F este derivabilă şi strict crescătoare, în particular, injectivă. Dacă $\alpha = \sup_{x\geq 0} F(x) \in \bar{\mathbb{R}}$, alegem $n_0 \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $n_0\alpha \geq 1$. .... **2 puncte**

Dacă $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, atunci $F(0) = 0 < 1/n < 1/n_0 \leq \alpha$ şi cum F este continuă şi injectivă, există un unic $x_n > 0$, astfel încât $F(x_n) = 1/n$. .... **1 punct**

(b) Cum $F(x_{n+1}) = 1/(n+1) < 1/n = F(x_n)$, $n > n_0$, şi F este strict crescătoare, rezultă că şirul $(x_n)_{n>n_0}$ este strict descrescător, deci convergent. .... **1 punct**

Din continuitatea lui F rezultă că $F(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = 0 = F(0)$, iar din injectivitatea lui F obţinem $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. .... **1 punct**

Din teorema de medie, aplicată funcţiei f pe intervalul $[0, x_n]$, există $t_n \in (0, x_n)$, astfel încât $F(x_n) = x_n f(t_n)$, deci $nx_n = 1/f(t_n)$. Cum $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$, din continuitatea lui f rezultă că $\lim_{n\to\infty} nx_n = 1/f(0)$. .... **2 puncte**

Problema 2. Fie n un număr natural nenul, fie $a_1 < \cdots < a_n$ numere reale şi fie $b_1, \ldots, b_n$ numere reale arbitrare. Arătaţi că:

(a) Dacă toate numerele b_i sunt strict pozitive, atunci există un polinom f cu coeficienţi reali, care nu are nicio rădăcină reală, astfel încât $f(a_i) = b_i$, $i = 1, \ldots, n$;

(b) Există un polinom f de grad cel puţin 1, care are toate rădăcinile reale, astfel încât $f(a_i) = b_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Soluţie. **(a)** Dacă $a_1, \ldots, a_n$ sunt numere reale distincte două câte două şi $b_1, \ldots, b_n$ sunt numere reale arbitrare, polinomul de interpolare

$$g = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\prod_{j\neq i}(X - a_j)}{\prod_{j\neq i}(a_i - a_j)}$$

are gradul cel mult $n-1$ şi $g(a_i) = b_i$, $i = 1, \ldots, n$. .... **1 punct**

Fie $b = \min(b_1, \ldots, b_n)$, fie $b'_i = \sqrt{b_i - b/2}$, $i = 1, \ldots, n$, şi fie g polinomul de interpolare pentru punctele $a_1, \ldots, a_n$ şi valorile $b'_1, \ldots, b'_n$. Polinomul $f = g^2 + b/2$ are proprietatea din enunţ. .... **2 puncte**

(b) Procedăm prin inducţie după n. Dacă $n = 1$, polinomul $f = X - a_1 + b_1$ îndeplineşte condiţia din enunţ. Fie $n \geq 2$ şi presupunem proprietatea adevărată oricare ar fi numerele reale $a_1 < \cdots < a_{n-1}$ şi oricare ar fi numerele reale $b_1, \ldots, b_{n-1}$.

Dacă există un $b_i = 0$, din ipoteza de inducţie există un polinom h, care are toate rădăcinile reale, astfel încât $h(a_j) = b_j/(a_j - a_i)$, oricare ar fi indicele $j \neq i$. Polinomul $f = (X - b_i)h$ satisface condiţiile din enunţ. .... **2 puncte**

Dacă toate numerele b_i sunt nenule, fie $I = \{i = 1, \ldots, n-1 \,|\, b_i b_{i+1} > 0\}$.

Dacă mulţimea I este vidă, polinomul de interpolare g satisface condiţiile cerute.

Dacă I are k elemente, $k \geq 1$, pentru fiecare indice i din I, alegem numerele reale a'_i şi b'_i, astfel încât $a_i < a'_i < a_{i+1}$ şi $b_i b'_i < 0$. Polinomul de interpolare pentru punctele $a_1, \ldots, a_n, a'_1, \ldots, a'_k$ şi valorile $b_1, \ldots, b_n, b'_1, \ldots, b'_k$ are gradul cel mult $n + k - 1$ şi cel puţin $n - k - 1 + 2k = n + k - 1$ rădăcini reale, deci îndeplineşte condiţia cerută. .... **2 puncte**

Problema 3. Fie G un grup finit care are următoarea proprietate: pentru orice automorfism f al lui G, există un număr natural m, astfel încât $f(x) = x^m$, oricare ar fi $x \in G$. Arătaţi că G este comutativ.

Soluţie. Fie a şi b două elemente din G, astfel încât $\operatorname{ord} a \,|\, \operatorname{ord} b$, fie $f\colon G \to G$, $f(x) = bxb^{-1}$, şi fie $m \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $f(x) = x^m$, oricare ar fi $x \in G$. Cum $b = f(b) = b^m$, rezultă că $b^{m-1} = e$, deci $\operatorname{ord} b \,|\, m - 1$. Atunci şi $a^{m-1} = e$, deci $a = a^m = f(a) = bab^{-1}$, de unde $ab = ba$.
.... **2 puncte**

(1) Fie $|G| = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ descompunerea canonică în factori primi distincţi a ordinului lui G şi fie $G_i = \{x\colon x \in G, x^{p_i^{\alpha_i}} = e\}$, $i = 1, \ldots, k$. Cum $\operatorname{ord} a \,|\, \operatorname{ord} b$ sau $\operatorname{ord} b \,|\, \operatorname{ord} a$, oricare ar fi $a, b \in G_i$, rezultă că $ab = ba$, oricare ar fi $a, b \in G_i$. Dacă $a, b \in G_i$, atunci $(ab)^{p_i^{\alpha_i}} = a^{p_i^{\alpha_i}} b^{p_i^{\alpha_i}} = e$, deci $ab \in G_i$. Rezultă că G_i este subgrup comutativ al lui G, $i = 1, \ldots, k$. ....**2 puncte**

(2) Dacă $a \in G_i$ şi $x \in G$, atunci $(xax^{-1})^{p_i^{\alpha_i}} = xa^{p_i^{\alpha_i}}x^{-1} = e$, deci $xax^{-1} \in G_i$. Prin urmare, dacă $a \in G_i$ şi $b \in G_j$, $i \neq j$, atunci $aba^{-1}b^{-1} = a(ba^{-1}b^{-1}) = (aba^{-1})b^{-1} \in G_i \cap G_j = \{e\}$, deci $ab = ba$. .... **1 punct**

(3) Fie $n_i = |G|/p_i^{\alpha_i}$. Cum $(n_1, \ldots, n_k) = 1$, există $\beta_1, \ldots, \beta_k$ în $\mathbb{Z}$, astfel încât $\sum_{i=1}^k \beta_i n_i = 1$. Atunci, pentru orice $x \in G$, rezultă că $x = x^1 = x^{\beta_1 n_1 + \cdots + \beta_k n_k} = x^{\beta_1 n_1} \cdots x^{\beta_k n_k} = x_1 \cdots x_k$, unde $x_i = x^{\beta_i n_i} \in G_i$, $i = 1, \ldots, k$.

Din **(1)**, **(2)** şi **(3)** rezultă cerinţa. .... **2 puncte**

Problema 4. **(a)** Daţi un exemplu de funcţie continuă $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$, astfel încât

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 1,$$

dar $f(x)/x$ nu are limită când $x \to \infty$.

(b) Fie $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie crescătoare, astfel încât

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Arătaţi că $f(x)/x$ are limită când $x \to \infty$ şi determinaţi valoarea acesteia.

Soluţie. **(a)** Fie $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x(\cos x)^2$. Evident, $f(x)/x = 4(\cos x)^2$ nu are limită când $x \to \infty$ şi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} \left(x^2 + x \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) = 1.$$

Un alt exemplu de astfel de funcţie este $x \mapsto 2x + 2x\cos x^2$, $x \geq 0$; verificările sunt evidente.
.... **1 punct**

(b) Fie $\epsilon \in (0,1)$ şi fie $a_\epsilon > 0$, astfel încât

$$(1-\epsilon^2)x^2 < \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t < (1+\epsilon^2)x^2, \tag{1}$$

oricare ar fi $x > a_\epsilon$. .... **1 punct**

Fie $b_\epsilon = a_\epsilon/(1-\epsilon)$ şi $x > b_\epsilon$. Cum $x - \epsilon x$, x şi $x + \epsilon x$ sunt strict mai mari decât a_ϵ, rezultă că

$$\int_0^{x-\epsilon x} f(t)\,\mathrm{d}t < (1+\epsilon^2)(1-\epsilon)^2x^2 \quad \text{şi} \quad \int_0^{x+\epsilon x} f(t)\,\mathrm{d}t < (1+\epsilon^2)(1+\epsilon)^2x^2. \tag{2}$$

.... **1 punct**

Din (1) şi (2) rezultă că

$$\begin{aligned}
\int_{x-\epsilon x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{x-\epsilon x} f(t)\,\mathrm{d}t > (1-\epsilon^2)x^2 - (1+\epsilon^2)(1-\epsilon)^2x^2 \\
&= x^2\epsilon(1-\epsilon)(2-\epsilon+\epsilon^2) \quad \text{şi} \\
\int_{x}^{x+\epsilon x} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{x+\epsilon x} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{x} f(t)\,\mathrm{d}t < (1+\epsilon^2)(1+\epsilon)^2x^2 - (1-\epsilon^2)x^2 \\
&= x^2\epsilon(1+\epsilon)(2+\epsilon+\epsilon^2).
\end{aligned} \tag{3}$$

.... **1 punct**

Cum f este crescătoare, rezultă că

$$\int_{x-\epsilon x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \epsilon x f(x) \quad \text{şi} \quad \int_{x}^{x+\epsilon x} f(t)\,\mathrm{d}t \geq \epsilon x f(x),$$

deci

$$\frac{1}{\epsilon x}\int_{x-\epsilon x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(x) \leq \frac{1}{\epsilon x}\int_{x}^{x+\epsilon x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

.... **2 puncte**

Ţinând cont de (3), obţinem $2 - 3\epsilon + 2\epsilon^2 - \epsilon^3 < f(x)/x < 2 + 3\epsilon + 2\epsilon^2 + \epsilon^3$, oricare ar fi $x > b_\epsilon$, i.e., $f(x)/x \to 2$ când $x \to \infty$. .... **1 punct**