Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Timişoara, 20 aprilie 2017

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a 11-a

Problema 1. Spunem că o funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ are proprietatea (P) dacă oricare ar fi un şir de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea că şirul $(f(x_n))_{n\geq 1}$ este convergent, rezultă că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent. Demonstraţi că o funcţie surjectivă cu proprietatea (P) este continuă.

Soluţie. Fie $a, b\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(a)=f(b)$. Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin formula următoare $x_n = \begin{cases} a, & n \text{ par} \\ b, & n \text{ impar}\end{cases}$ este convergent deoarece şirul $\big(f(x_n)\big)_{n\geq 1}$ este convergent. Rezultă f injectivă. Cum f este presupusă surjectivă, este de fapt inversabilă **2p**

Fie $x_0\in\mathbb{R}$ şi $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir convergent la x_0. Şirul $\big(f\big(f^{-1}(x_n)\big)\big)_{n\geq 1}$ este convergent, prin urmare şirul $\big(f^{-1}(x_n)\big)_{n\geq 1}$ este convergent. Şirul $(y_n)_{n\geq 1}$ dat de formula $y_n = \begin{cases} x_k, & n=2k \\ x_0, & n=2k-1\end{cases}$ converge la x_0 .... **2p**

Rezultă că şirul $\big(f^{-1}(y_n)\big)_{n\geq 1}$ este convergent, deci $\lim\limits_{n\to\infty} f^{-1}(y_{2n}) = \lim\limits_{n\to\infty} f^{-1}(y_{2n-1})$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} f^{-1}(x_n) = f(x_0)$. Deoarece x_0 a fost ales arbitrar, rezultă că f^{-1} este continuă pe $\mathbb{R}$. **2p**

Cum inversa unei bijecţii continue este funcţie continuă, f rezultă continuă pe pe $\mathbb{R}$ **1p**

Problema 2. Fie $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice simetrice. Demonstraţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1) $\det(A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_k^2) = 0$;

2) pentru orice matrice $B_1, B_2, \ldots, B_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ are loc relaţia

$$\det(A_1B_1 + A_2B_2 + \cdots + A_kB_k) = 0.$$

(O matrice X este simetrică dacă ea coincide cu transpusa sa X^t).

Soluţie. Demonstrăm **1**) $\Rightarrow$ **2**). Din $\det(A_1^2+A_2^2+\cdots+A_k^2)=0$ rezultă că există o matrice $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X\neq O_{n,1}$, astfel ca $(A_1^2+A_2^2+\cdots+A_k^2)X = O_{n,1}$ (sistemul omogen ataşat are soluţie nebanală). **2p**

Rezultă $X^t(A_1^2+A_2^2+\cdots+A_k^2)X=O_n$, deci $X^tA_1^tA_1X+X^tA_2^tA_2X+\cdots+X^tA_k^tA_kX=O_n$. Dacă notăm $A_iX=Y_i, i=1,2,\ldots,k$, obţinem $Y_1^tY_1+Y_2^tY_2+\cdots+Y_k^tY_k=O_n$. Rezultă astfel $A_iX=O_{n,1}$, adică $A_i^tX=O_{n,1}, i=1,2,\ldots,k$ **3p**

Pentru orice matrice $B_1, B_2, \ldots, B_k\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avem $(B_1^tA_1^t+B_2^tA_2^t+\cdots+B_k^tA_k^t)X=O_{n,1}$, adică sistemul $(B_1^tA_1+B_2^tA_2+\cdots+B_k^tA_k)X=O_{n,1}$ are soluţie nebanală şi deci $\det(B_1^tA_1^t+B_2^tA_2^t+\cdots+B_k^tA_k^t)=\det(A_1B_1+A_2B_2+\cdots+A_kB_k)=0$.

Implicaţia **2**) $\Rightarrow$ **1**) este evidentă. **2p**

Problema 3. Fie $n\geq 2$ întreg şi $A,\ B\in M_n(\mathbb{C})$. Dacă $(AB)^3=O_n$, rezultă oare că $(BA)^3=O_n$? Justificaţi răspunsul.

Soluţie. Vom arăta că răspunsul este afirmativ pentru $n \leq 3$ şi negativ pentru $n \geq 4$. Matricele $C = AB$ şi $D = BA$ au aceeaşi urmă şi determinatul fiecăreia este nul. Dacă $C^2 = O_n$, atunci $D^3 = BC^2A = O_n$ **2p**

Pentru $n = 2$, matricele C şi D au acelaşi polinom caracteristic $P_C(X) = P_D(X) = X^2 - aX$, cu $a = \operatorname{tr} C = \operatorname{tr} D$. Din ipoteză şi teorema Cayley-Hamilton se obţine $O_n = C^3 = aC^2$, astfel că $a = 0$ sau $C^2 = 0$. Ambele variante conduc la concluzia $D^2 = aD = O_n$ **1p**

În continuare putem presupune că $C^2 \neq O_n$.

Pentru $n = 3$, polinoamele caracteristice sunt $P_C(X) = X^3 - aX^2 + bX$ şi respectiv $P_D(X) = X^3 - aX^2 + cX$. Din $aC^2 = bC$ rezultă $bC^2 = O_n$, încât $b = 0$. Prin urmare, avem $aC^2 = O_n$, de unde $a = 0$ **1p**

Aplicând încă o dată teorema Cayley-Hamilton, se obţine $D^4 = -cD^2$. Cum $D^4 = BC^3A = O_n$, rezultă $cD^2 = O_n$, astfel că fie $D^2 = O_n$, fie $c = 0$. Ambele variante conduc la concluzia $D^3 = O_n$ **1p**

Fie acum $n = 4$. Exemplul

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

arată că este posibil să avem $(AB)^3 = O_n$ şi $(BA)^3 \neq O_n$ **1p**

Pentru $n \geq 5$ construim un exemplu punând în colţul din stânga-sus al matricei nule O_n matricele A, B de ordin 4 de mai sus **1p**

Problema 4. Fie $f : [a, b] \to [a, b]$ o funcţie derivabilă cu f' continuă şi strict pozitivă. Demonstraţi că există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$f(f(b)) - f(f(a)) = (f'(c))^2(b - a).$$

Soluţie. Se observă că funcţia f este strict crescătoare.

Aplicând teorema de medie, pe intervalul $[f(a), f(b)]$ găsim $c_1 \in (f(a), f(b))$

$$f(f(b)) - f(f(a)) = f'(c_1)(f(b) - f(a)).$$

.... **2p**

Aplicând din nou teorema lui Lagrange pe intervalul $[a, b]$ găsim $c_2 \in (a, b)$ astfel încât

$$f(b) - f(a) = f'(c_2)(b - a).$$

Din relaţiile precedente rezultă

$$f(f(b)) - f(f(a)) = f'(c_1)f'(c_2)(b - a).$$

. . . . **2p**

Cum $f' > 0$ rezultă că $\sqrt{f'(c_1)f'(c_2)}$ este cuprins între $f'(c_1)$ şi $f'(c_2)$. Cum f' are proprietatea lui Darboux există c intre c_1 şi c_2 astfel încât $f'(c) = \sqrt{f'(c_1)f'(c_2)}$, ceea ce este echivalent cu

$$f'(c_1)f'(c_2) = f'(c)^2.$$

În concluzie

$$f(f(b)) - f(f(a)) = f'(c)^2(b-a), c \in (a,b).$$

. . . . **3p**