Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Timişoara, 20 aprilie 2017

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a IX-a

Problema 1. Fie ABC un triunghi neisoscel, cu centrul de greutate G şi centrul cercului înscris I. Arătaţi că $GI \perp BC$ dacă şi numai dacă $AB + AC = 3BC$.

Soluţie. Cu notaţiile uzuale au loc egalităţile

$$\overline{GI} = \overline{AI} - \overline{AG} = \left(\frac{b}{a+b+c} - \frac{1}{3}\right)\overline{AB} - \left(\frac{c}{a+b+c} - \frac{1}{3}\right)\overline{AC} =$$

$$= \frac{1}{3(a+b+c)}\left((2b-a-c)\overline{AB} + (2c-a-b)\overline{AC}\right).$$

.... **2p**

Atunci $GI \perp BC \Longleftrightarrow \overline{GI} \cdot \overline{BC} = 0 \Longleftrightarrow \left((2b-a-c)\overline{AB} + (2c-a-b)\overline{AC}\right) \cdot (\overline{AC} - \overline{AB}) = 0$

.... **2p**

Deoarece $\overline{AB} \cdot \overline{AB} = c^2$, $\overline{AC} \cdot \overline{AC} = b^2$ şi $2\,\overline{AB} \cdot \overline{AC} = b^2 + c^2 - a^2$, ultima relaţie este echivalentă cu $3(b-c)(b^2+c^2-a^2) - 2(2b-a-c)c^2 + 2(2c-a-b)b^2 = 0$, sau $(b-c)(a+b+c)(-3a+b+c) = 0$

.... **2p**

Cum $b \neq c$ şi $a+b+c > 0$, rezultă că $GI \perp BC \Longleftrightarrow b + c = 3a$ **1p**

Problema 2. Fie $ABCD$ un pătrat. Considerăm punctele $E \in (AB)$, $N \in (CD)$ şi $F, M \in (BC)$, astfel încât triunghiurile AMN şi DEF să fie echilaterale. Arătaţi că

$$PQ = FM,$$

unde $\{P\} = AN \cap DE$ şi $\{Q\} = AM \cap EF$.

Soluţie. Deoarece $\Delta\, ABM \equiv \Delta\, ADN$(IC) şi $\Delta\, DAE \equiv \Delta\, DCF$(IC), rezultă că $m(\widehat{BAM}) = m(\widehat{DAN}) = m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{CDF}) = 15^\circ$ **1p**

Atunci $\Delta\, ABM \equiv \Delta\, ADN \equiv \Delta\, DAE \equiv \Delta\, DCF$(CU) şi $\Delta\, AMN \equiv \Delta\, DEF$ **1p**

Rezultă că $ADNE$ este un dreptunghi, deci P este mijlocul comun al segmentelor $[AN]$ şi $[DE]$. În triunghiul echilateral DEF avem atunci $PF \perp DE$. **2p**

Deoarece $m(\widehat{DAM}) + m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{DAM}) + m(\widehat{BAM}) = 90^\circ$, rezultă că $AM \perp DE$. Astfel, $AM \parallel PF$ **1p**

Deoarece $m(\widehat{PAQ}) = m(\widehat{PEQ}) = 60^\circ$, patrulaterul $PAEQ$ este inscriptibil, astfel că $m(\widehat{FPQ}) = m(\widehat{EPF}) - m(\widehat{EPQ}) = 75^\circ$. Cum $m(\widehat{MFP}) = 180^\circ - m(\widehat{CFD}) - m(\widehat{DFP}) = 75^\circ$, ... **1p**

rezultă că patrulaterul $MQPF$ este un trapez isoscel, deci $[PQ] \equiv [FM]$ **1p**

Problema 3. Fie a şi n două numere naturale nenule fixate.

a) Arătaţi că există n numere naturale nenule $a_1, a_2, \ldots, a_n$ astfel încât

$$1 + \frac{1}{a} = \left(1 + \frac{1}{a_1}\right)\left(1 + \frac{1}{a_2}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{a_n}\right).$$

b) Demonstraţi că numărul reprezentărilor de forma de mai sus ale lui $1 + \dfrac{1}{a}$ este finit.

Soluţie. a) Dacă $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ sunt numere naturale nenule consecutive, rezultă că

$$\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)=\frac{a_n+1}{a_1}\,.$$

Alegând $a_k = an+k-1, \forall k=\overline{1,n}$, obţinem

$$\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)=\frac{an+n}{an}=1+\frac{1}{a}\,.$$

.... **3p**

b) Este suficient să demonstrăm prin inducţie după $n \in \mathbb{N}^*$ proprietatea $P(n)$: "Pentru orice număr raţional $q > 1$ există cel mult un număr finit de alegeri a n numere naturale nenule $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$ astfel ca $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right)=q$."

Propoziţia $P(1)$ este evident adevărată. **1p**

Presupunem că propoziţia $P(n)$ este adevărată pentru un număr natural nenul n. Fie $q \in \mathbb{Q},\ q > 1$. Considerăm că există $n+1$ numere naturale nenule $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_{n+1}$ astfel încât $\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{1}{a_k}\right)=q$. Atunci, din inegalităţile $1+\dfrac{1}{a_1} < q \le \left(1+\dfrac{1}{a_1}\right)^{n+1}$, obţinem $a_1 \in A$, unde $A=\left(\frac{1}{q-1}, \frac{1}{\sqrt[n+1]{q}-1}\right] \cap \mathbb{N}^*$ este o mulţime finită. Pentru $a_1 \in A$, fixat, notăm $q_1 = \frac{q}{1+1/a_1}$. Avem $q_1 \in \mathbb{Q},\ q_1 > 1$. Conform $P(n)$, numărul de alegeri a n numere naturale $a_2 \le \cdots \le a_{n+1}$, cu proprietatea $\displaystyle\prod_{k=2}^{n+1}\left(1+\frac{1}{a_k}\right)=q_1$, este cel mult finit. Deducem că numărul de alegeri a $n+1$ numere naturale nenule $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_{n+1}$, cu proprietatea $\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{1}{a_k}\right)=q$, este finit. Rezultă că propoziţia $P(n+1)$ este adevărată. **3p**

Problema 4. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, cu $0 < a < b$, iar $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie care satisface proprietatea

$$f\left(x^2+ay\right) \ge f\left(x^2+by\right), \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}. \qquad (*)$$

a) Arătaţi că $f(s) \le f(0) \le f(t)$, pentru orice $s < 0$ şi $t > 0$.
b) Demonstraţi că f este constantă pe intervalul $(0, \infty)$.
c) Daţi un exemplu de funcţie nemonotonă $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea $(*)$.

Soluţie. Pentru $u, v \in \mathbb{R}$, condiţia necesară şi suficientă ca sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x^2+ay=u \\ x^2+by=v \end{cases}$$

să admită soluţii este $av \le bu$, o soluţie fiind $\left(x=\sqrt{\frac{bu-av}{b-a}}, y=\frac{v-u}{b-a}\right)$. În acest caz, rezultă că $f(u) \ge f(v)$.

a) Pentru $s < 0$, alegând $x=\sqrt{\frac{-as}{b-a}}$ şi $y=\frac{s}{b-a}$, avem $f(0)=f(x^2+ay) \ge f(x^2+by)=f(s)$.

Pentru $t > 0$, alegând $x = \sqrt{\frac{bt}{b-a}}$ şi $y = \frac{-t}{b-a}$, avem $f(t) = f(x^2 + ay) \geq f(x^2 + by) = f(0)$.
.... **2p**

b) Fie $c = f(1)$. Vom demonstra prin inducţie după $n \in \mathbb{N}^*$ că $f(u) = c, \forall u \in \left[\left(\dfrac{a}{b}\right)^n, \left(\dfrac{b}{a}\right)^n\right]$.

Pentru orice $u \in \left[\dfrac{a}{b}, \dfrac{b}{a}\right]$, sistemele

$$\begin{cases} x^2 + ay = 1 \\ x^2 + by = u \end{cases}$$

şi

$$\begin{cases} x^2 + ay = u \\ x^2 + by = 1 \end{cases}$$

admit soluţii, de unde rezultă că $c = f(1) \geq f(u) \geq f(1) = c$. Atunci $f(u) = c, \forall u \in \left[\frac{a}{b}, \frac{b}{a}\right]$.

Presupunem acum că pentru un $n \in \mathbb{N}^*$ are loc $f(u) = c, \forall u \in \left[\left(\frac{a}{b}\right)^n, \left(\frac{b}{a}\right)^n\right]$. Pentru orice $u \in \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}, \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}\right]$, sistemele

$$\begin{cases} x^2 + ay = \left(\frac{b}{a}\right)^n \\ x^2 + by = u \end{cases}$$

şi

$$\begin{cases} x^2 + ay = u \\ x^2 + by = \left(\frac{a}{b}\right)^n \end{cases}$$

admit soluţii, astfel că $c = f\left(\left(\frac{b}{a}\right)^n\right) \geq f(u) \geq f\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n\right) = c$.

Rezultă $f(u) = c, \forall u \in \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}, \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}\right]$ **2p**

Pentru orice $t > 0$ există $n \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $t \in \left[\frac{1}{1+n\frac{b-a}{a}}, 1 + n\frac{b-a}{a}\right]$. Din inegalitatea lui Bernoulli avem $\left[\frac{1}{1+n\frac{b-a}{a}}, 1 + n\frac{b-a}{a}\right] \subset \left[\left(\frac{a}{b}\right)^n, \left(\frac{b}{a}\right)^n\right]$, deci $t \in \left[\left(\frac{a}{b}\right)^n, \left(\frac{b}{a}\right)^n\right]$.

Obţinem $\bigcup\limits_{n\geq 1} \left[\left(\frac{a}{b}\right)^n, \left(\frac{b}{a}\right)^n\right] = (0, \infty)$, de unde rezultă că f este constantă pe $(0, \infty)$.......... **1p**

c) Fie $t < 0$ oarecare. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ au proprietatea că $x^2 + ay < t$, atunci $y < \frac{t}{a}$ şi rezultă că $x^2 + by = x^2 + ay + (b-a)y < t\left(1 + \frac{b-a}{a}\right) = \frac{bt}{a}$. Funcţia $f_t : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f_t(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ dacă } x \in [t, \infty) \\ \frac{a(t-x)}{t(a-b)} & , \text{ dacă } x \in \left(\frac{tb}{a}, t\right) \\ 0 & , \text{ dacă } x \in \left(-\infty, \frac{tb}{a}\right] \end{cases}$$

satisface condiţia din enunţ şi nu este monotonă... **2p**