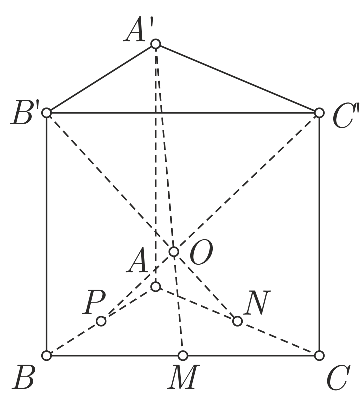
Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Timişoara, 20 aprilie 2017

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a 8-a

Problema 1. Demonstraţi următoarele afirmaţii:
a) Dacă $ABCA'B'C'$ este o prismă dreaptă şi $M \in (BC)$, $N \in (CA)$, $P \in (AB)$ sunt astfel încât $A'M$, $B'N$ şi $C'P$ sunt perpendiculare două câte două şi concurente, atunci prisma $ABCA'B'C'$ este regulată.
b) Dacă $ABCA'B'C'$ este o prismă regulată şi $\dfrac{AA'}{AB} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$, atunci există $M \in (BC)$, $N \in (CA)$, $P \in (AB)$ astfel încât dreptele $A'M$, $B'N$ şi $C'P$ să fie perpendiculare două câte două şi concurente.

Soluţie. a) Fie $\{O\} = A'M \cap B'N \cap C'P$. Planul $(B'N, C'P)$ intersectează planele paralele (ABC) şi $(A'B'C')$ după drepte paralele, deci $NP \parallel B'C'$. Rezultă că $PN \parallel BC$. Analog $MP \parallel AC$, $NM \parallel AB$. Atunci $PNCM$ şi $PNMB$ sunt paralelograme, deci M este mijlocul lui $[BC]$. Similar, N şi P sunt mijloacele laturilor $[AC]$ şi $[AB]$. **2p**
Dreapta $C'P$ este perpendiculară pe $A'M$ şi pe $B'N$, deci pe orice dreaptă aflată în planul determinat de ele, în particular pe $A'B'$. Deducem că $AB \perp C'P$ şi $AB \perp CC'$, deci $AB \perp (PCC')$, de unde $AB \perp PC$. Aşadar în triunghiul ABC, $[CP]$ este mediană şi înălţime, deci $AC = BC$. Analog rezultă $AB = AC$, deci ABC este echilateral, iar prisma regulată. **2p**
b)Fie M, N, P mijloacele laturilor. Atunci $A'B'MN$ este un trapez ale cărui diagonale se intersectează într-un punct O astfel încât $\dfrac{A'O}{OM} = \dfrac{B'O}{ON} = 2$. Analog $A'C'MP$ este un trapez ale cărui diagonale se intersectează într-un punct O' astfel încât $\dfrac{A'O'}{O'M} = \dfrac{B'O'}{O'N} = 2$. Aşadar punctele O' şi O coincid, deci $A'M$, $B'N$ şi $C'P$ sunt concurente.
Notând $AA' = h$, $AB = \ell$, avem $BN = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$, $A'M^2 = B'N^2 = h^2 + \dfrac{3\ell^2}{4}$, $A'O^2 = B'O^2 = \dfrac{4h^2}{9} + \dfrac{\ell^2}{3}$. Atunci $A'O \perp B'O \Leftrightarrow A'O^2 + B'O^2 = A'B'^2 \Leftrightarrow \dfrac{8h^2}{9} + \dfrac{2\ell^2}{3} = \ell^2 \Leftrightarrow \dfrac{h}{\ell} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **3p**



Problema 2. Arătaţi că pentru orice număr natural $n \geq 3$, există numerele naturale nenule $x_1, x_2, \ldots, x_n$, diferite două câte două, astfel încât $\{2, n\} \subset \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ şi

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} = 1.$$

Soluţie
$\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{(n-1)n} + \dfrac{1}{n} = \left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1}{n} = 1,$ **2p**
Dacă n nu este de forma $k(k+1)$, $(k \in \mathbb{N})$, atunci numerele $x_1 = 2$, $x_2 = 2\cdot 3$, … , $x_{n-1} = (n-1)n$, $x_n = n$ sunt distincte două câte două, deci satisfac condiţiile din enunţ. **1p**

Dacă $n = k(k+1)$, $k \in \mathbb{N}$, (cel mai mic $n \geq 3$ de această formă este $n = 6$) atunci pornind de la scrierea $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-2)(n-1)} + \frac{1}{n-1} = 1$, putem obţine scrierea $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-3)(n-2)} + \frac{1}{(n-2)(n-1)+1} + \frac{1}{(n-2)(n-1)[(n-2)(n-1)+1]} + \frac{1}{n-1} = 1$. **3p**

Numerele $x_1 = 2$, $x_2 = 2\cdot 3$, ..., $x_{n-3} = (n-3)(n-2)$, $x_{n-2} = (n-2)(n-1)+1$, $x_{n-1} = (n-2)(n-1)[(n-2)(n-1)+1]$, $x_n = n-1$ sunt diferite două câte două. În plus, $n \leq (n-3)(n-2)$, $\forall n \geq 6$, deci $n \in \{x_2, x_3, \ldots, x_{n-3}\}$, prin urmare numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisfac condiţiile din enunţ. **1p**

Problema 3. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, şi $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ numere reale pozitive astfel încât

$$\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_2}{b_2} \leq \ldots \leq \frac{a_n}{b_n}.$$

Determinaţi cea mai mare valoare a numărului real c pentru care este satisfăcută inegalitatea

$$(a_1 - b_1c)x_1 + (a_2 - b_2c)x_2 + \ldots + (a_n - b_nc)x_n \geq 0$$

pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ cu $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$.

Soluţie. Notând $y_1 = x_1$, $y_{k+1} = x_{k+1} - x_k$, pentru $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, avem $x_k = y_1 + y_2 + \ldots + y_k$, cu $y_1 > 0$, $y_k \geq 0$, $\forall\, k = \overline{2, n}$.

Cu aceste notaţii, inegalitatea din enunţ revine la $\big(a_1 + a_2 + \ldots + a_n - c(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)\big)y_1 + \big(a_2 + a_3 + \ldots + a_n - c(b_2 + b_3 + \ldots + b_n)\big)y_2 + \ldots + (a_n - cb_n)y_n \geq 0$. $\quad(*)$ **1p**

Pentru $y_1 = 1$, $y_2 = \ldots = y_n = 0$, observăm că este necesar ca $c \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}$. **2p**

Arătăm că, reciproc, pentru orice $c \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}$ are loc inegalitatea cerută, deci aceasta este valoarea maximă căutată a lui c.

Avem $c \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} \leq \frac{a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{b_2 + b_3 + \ldots + b_n} \leq \ldots \leq \frac{a_n}{b_n}$.

Într-adevăr, inegalitatea $\frac{a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n}{b_k + b_{k+1} + \ldots + b_n} \leq \frac{a_{k+1} + \ldots + a_n}{b_{k+1} + \ldots + b_n}$ se scrie echivalent $a_k(b_{k+1} + \ldots + b_n) \leq b_k(a_{k+1} + \ldots + a_n)$ şi rezultă din inegalităţile $\frac{a_k}{b_k} \leq \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}, \frac{a_k}{b_k} \leq \frac{a_{k+2}}{b_{k+2}}, \ldots, \frac{a_k}{b_k} \leq \frac{a_n}{b_n}$ **3p**

Inegalitatea $(*)$ este satisfăcută: fiecare termen din membrul stâng este nenegativ. **1p**

Problema 4. Fie $a, b, c, d \in [0, 1]$. Demonstraţi inegalitatea

$$\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+c} + \frac{c}{1+d} + \frac{d}{1+a} + abcd \leq 3.$$

Soluţie.

$\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+c} + \frac{c}{1+d} + \frac{d}{1+a} + abcd \leq \frac{a}{1+abcd} + \frac{b}{1+abcd} + \frac{c}{1+abcd} + \frac{d}{1+abcd} + abcd = \frac{a+b+c+d}{1+abcd} + abcd$. **2p**

Folosind succesiv inegalitatea $x + y \leq 1 + xy$, $\forall\, x, y \in [0, 1]$ (echivalentă cu $(1-x)(1-y) \geq 0$), avem $a + b + c + d \leq 1 + ab + 1 + cd = ab + cd + 2 \leq 1 + abcd + 2 = abcd + 3$. **3p**

Notând $x = abcd \in [0, 1]$, este suficient să demonstrăm că $1 + \frac{2}{1+x} + x \leq 3$, ceea ce revine la $2 + x^2 + x \leq 2x + 2$, deci la $x^2 \leq x$. **2p**