Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Timişoara, 20 aprilie 2017

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a V-a

Problema 1. Fie numărul natural $n = 7 + 7^2 + 7^3 + ... + 7^{2017}$.

a) Arătaţi că 7^{2018} dă prin împărţire la 6 şi prin împărţire la 48 acelaşi rest.

b) Aflaţi ultimele două cifre ale numărului $6n$.

Soluţie.

a) $7n = 7^2 + 7^3 + 7^4 + ... + 7^{2017} + 7^{2018}$, de unde $6n = 7n - n = 7^{2018} - 7$. **1p**

Rezultă $7^{2018} = 6n + 7 = 6(n+1) + 1$, ceea ce arată că restul împărţirii la 6 a numărului 7^{2018} este 1 .... **1p**

Avem $n = 7+7^2(1+7)+7^4(1+7)+...+7^{2016}(1+7) = 7+8\cdot\left(7^2 + 7^4 + ... + 7^{2016}\right) = 7+8p$, unde $p = 7^2+7^4+...+7^{2016}$. Cu aceasta $7^{2018} = 6(8p+7)+7 = 48p+42+7 = 48p+49 = 48(p+1)+1$, de unde deducem că restul împărţirii lui 2^{2018} la 48 este 1. .... **2p**

b) Avem $6n = 7^{2018} - 7$. Dacă notăm $u_2(x)$ ultimele două cifre ale numărului x, avem $u_2\left(7^{4k}\right) = 01$, $u_2\left(7^{4k+1}\right) = 07$, $u_2\left(7^{4k+2}\right) = 49$, $u_2\left(7^{4k+3}\right) = 43$. **2p**

Atunci $u_2\left(7^{2018}\right) = u_2\left(7^{4\cdot504+2}\right) = 49$. Rezultă $u_2(6n) = u_2(49-7) = 42$. **1p**

Problema 2. Aflaţi câte numere naturale scrise în baza zece îndeplinesc simultan condiţiile:

i) Numărul are şase cifre.

ii) Produsul cifrelor nenule ale numărului este 84.

iii) Patru dintre cifrele numărului sunt 2, 0, 1, 7.

Soluţie.

Cum $\dfrac{84}{2\cdot 1\cdot 7} = 6$, deosebim următoarele cazuri: **1p**

(1) Cifrele sunt $2, 0, 1, 7, 0, 6$.

Dacă prima cifră este 1, atunci cele 5 cifre rămase pot fi aranjate în 60 de moduri; analog dacă prima cifră este 2, 6 sau 7. În acest caz sunt 240 de numere. **2p**

(2) Cifrele sunt $2, 0, 1, 7, 1, 6$

Dacă prima cifră este 2, atunci cele 5 cifre rămase pot fi aranjate în 60 de moduri; analog dacă prima cifră este 6 sau 7. Dacă prima cifră este 1 se obţin 120 de numere. În total, în acest caz sunt 300 de numere. **2p**

(3) Cifrele sunt $2, 0, 1, 7, 2, 3$

Dacă prima cifră este 1, 3 sau 7, se obţin $3\cdot 60 = 180$ de numere, iar dacă prima cifră este 2 se obţin 120 de numere. În total, în acest caz sunt 300 de numere. **1p**

Aşadar, în total sunt 840 de numere. **1p**

Problema 3. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Spunem că numărul natural $\overline{a_1 a_2 ... a_n}$ are proprietatea (P) dacă

$$\overline{a_1 a_2 ... a_n} = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n + a_1 + a_2 + ... + a_n.$$

Găsiţi toate numerele naturale $\overline{a_1 a_2 ... a_n}$ care au proprietatea (P).

Soluţie.

Dacă $n = 2$, avem $\overline{a_1 a_2} = a_1 \cdot a_2 + a_1 + a_2$ echivalent cu $9a_1 = a_1 \cdot a_2$, de unde $a_2 = 9$. Avem numerele 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99. .... **3p**

Dacă $n \geq 3$, vom arăta că $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n + a_1 + a_2 + \ldots + a_n < \overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$............. **1p**

Relaţia $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n + a_1 + a_2 + \ldots + a_n < \overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$ este echivalentă cu $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n < a_1 \cdot \underbrace{99\ldots9}_{n-1 \text{ cifre}} + a_2 \cdot \underbrace{99\ldots9}_{n-2 \text{ cifre}} + \ldots + a_{n-1} \cdot 9$. Avem $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n \leq a_1 \cdot \underbrace{9 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 9}_{n-1 \text{ factori}} < a_1 \cdot 9 \cdot \underbrace{10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10}_{n-2 \text{ factori}} = a_1 \cdot 9\underbrace{00\ldots0}_{n-2 \text{ cifre}} < a_1 \cdot \underbrace{99\ldots9}_{n-1 \text{ cifre}} < a_1 \cdot \underbrace{99\ldots9}_{n-1 \text{ cifre}} + a_2 \cdot \underbrace{99\ldots9}_{n-2 \text{ cifre}} + \ldots + a_{n-1} \cdot 9$. ... **3p**

Problema 4. Se consideră cifrele a, b, c, d, e, f nenule distincte. Determinaţi numerele naturale x cu proprietatea că x divide oricare număr de şase cifre distincte scris cu cifrele a, b, c, d, e, f.

Soluţie.

Oricum am alege 6 cifre nenule diferite, cel puţin două dintre ele sunt consecutive.

Presupunem că nu sunt două cifre diferite consecutive. Dacă $a < b < c < d < e < f$, avem $b \geq a + 2$, $c \geq b + 2 \geq a + 4$, $d \geq c + 2 \geq a + 6$, $e \geq d + 2 \geq a + 8$ şi $f \geq e + 2 \geq a + 10$, ceea ce nu este posibil deoarece f este cifră. **2p**

Notăm cu m şi n, $m > n$ două cifre consecutive dintre cifrele a, b, c, d, e, f, iar cu p, q, r, s cele patru cifre rămase.

Avem $x \mid \overline{pqrsmn}$ şi $x \mid \overline{pqrsnm}$, de unde $x \mid \overline{pqrsmn} - \overline{pqrsnm}$, adică $x \mid 9(m - n)$. Dar $m - n = 1$ şi atunci $x \mid 9$. **3p**

Dacă $3 \nmid a+b+c+d+e+f$, atunci $x = 1$. Dacă $3 \mid a+b+c+d+e+f$ şi $9 \nmid a+b+c+d+e+f$, atunci $x = 1$ sau $x = 3$. Dacă $9 \mid a + b + c + d + e + f$, atunci $x = 1$, $x = 3$ sau $x = 9$....... **2p**