Concursul Interjudetean Memorial “Preda Filofteia”
Editia a XXIII-a
1 aprilie 2017

CLASA A IX-A 4 ORE

1. a) Stiind ca $a, b \in (0, \infty)$, demonstrati inegalitatea:
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$
b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\frac{2x^2+1}{x^2+2} + \frac{x^2+2}{2x^2+1} \leq 2$.

Prof. Neacsu Steluta, Calimanesti

2. Se dau ecuatiile $\left[\frac{4x+1}{3}\right] = \frac{6x-1}{2}$ si $\left|\frac{3x}{2} - 1\right| = |x+1|$. Se considera progresia geometrica cu primul termen $a_1 = x_1$ si ratia $q = x_2$, unde x_2 este cea mai mare solutie a ecuatiei cu parte intreaga, iar x_1 este solutia strict pozitiva a ecuatiei cu modul. Calculati partea intreaga a sumei primilor 2017 termeni.

Prof. Dinu Maria, Dragasani

3. a) Arătați că
$(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2), \ \forall a, b, x, y \in R.$
b) Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația
$$\left[\sqrt{n^2 - n + 1} + \sqrt{n^2 + n + 1}\right] = \left[\sqrt{n^2 + 6n}\right].$$
.

prof. Cătălin Bîrzescu, Rm. Vâlcea

4. Pe latura [AB] și diagonala [AC] a paralelogramului ABCD se iau punctele M și respectiv N astfel încât $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$, a ∈ R. Să se determine a stiind că punctele M, N și D sunt coliniare.

Prof. Duta Chitu Florin, Rm. Valcea

NOTĂ:
Toate subiectele sunt obligatorii!
Timp de lucru: 3 ore

SUCCES!

Concursul Interjudetean Memorial “Preda Filofteia”
Editia a XXIII-a
1 aprilie 2017

CLASA A IX-A 3 ORE

1. Fie ecuatia $x^2 - (2n^2 + 3n - 3)x - 6n^2 - 9n = 0, \forall n \in N^*$.
   a) Pentru n=2, rezolvati ecuatia.
   b) Fie S_n radacina pozitiva ecuatiei date. Stiind ca S_n este suma primilor n termeni ai unui sir $(a_n)_{n\geq 1}$, stabiliti daca acest sir are termenii in progresie aritmetica.

Prof. Dinu Maria-C.N. Gib Mihaescu

2. Se considera functia $f: R \to R, f(x) = \frac{x+2}{x^2+3x+4}$ si multimea $A = \{a \in R / a = [f(x)], \forall\, x \in R\}$.
   a) Aratati ca $-2 \notin$ Im f si $\frac{1}{2} \in$ Im f.
   b) Calculati suma patratelor elementelor multimii A.

Prof. Dinu Daniel-C.N. Gib Mihaescu

3. Se considera numerele $a \in [-2; 3]$, $b \in (-1;\ 5\ )$ si $c \in [-3; 7]$.
   Aratati ca numerele
   $x = \sqrt{(a+2b+4)^2} + \sqrt{(2b+3c-31)^2} + \sqrt{(3c-a+12)^2}$ si
   $y = \sqrt{(a+b+c+6)^2} + 2\sqrt{(a-2b+c-15)^2} + \sqrt{(a-5b+c-26)^2}$
   sunt naturale.

Prof. Barbu Daniela, Calimanesti

4. Se considera punctele *A*, *B*, *C* astfel încât $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{CA}$, iar *M* şi *N* situate simetric faţă de punctul A, necoliniare cu *A* si *B*.
   a) Exprimati $\overrightarrow{MC}$ in funcţie de $\overrightarrow{MA}$ si $\overrightarrow{MB}$.
   b) Calculaţi $\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CM}$.

Prof. Barbu Daniela, Calimanesti

NOTĂ:
Toate subiectele sunt obligatorii!
Timp de lucru: 3 ore

SUCCES!

Concursul Interjudetean Memorial "Preda Filofteia"
Editia a XXIII-a
1 aprilie 2017

CLASA A X-A 4 ORE

1. Sa determine numerele complexe z avand modulul egal cu 1, care verifica:

$$8z^4(z^2+1)=z^{10}+1.$$

G.M. Nr. 5-2016.

2. a.Stiind ca a si b sunt numere reale oarecare si $x>0, y>0$, demonstrati inegalitatea

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}.$$

b.Sa se arate ca

$$log_a^2\sqrt{bc} + log_b^2\sqrt{ac} + log_c^2\sqrt{ab}\geq 3, \forall\, a,b,c > 1.$$

Prof. Dinu Gigi-Daniel, Dragasani

3. a) Sa se rezolve ecuatia $2017^x+7=2024^x$.
   b) Aratati ca functia $f: R\to R, f(x)=2024^x+2017^x$, este injectiva.
   c) Sa se rezolve ecuatia:

$$\left(\frac{1}{2024}\right)^{\log_{\frac{1}{2017}}\left(\sqrt[3]{x}-3\right)}-2017^{\log_{2024}\left(\sqrt[3]{x}+4\right)}=7$$

Prof. Dinu Gigi-Daniel, Dragasani

4. Fie dezvoltarea $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}+\sqrt[4]{a^3}\right)^n, n\in N\backslash\{0;1\}$
   a. Sa se determine n stiind ca suma coeficientilor binomiali ai primilor 3 termeni este 154.
   b. Pentru n=17, aflati termenul care contine pe $a^{\frac{-17}{4}}$.
   c. Pentru n=17 si a=2 calculati $\sum_{k=0}^{16}\left(\frac{C_{17}^{k+1}T_{k+1}}{C_{17}^{k}T_{k+2}}\right)^{\frac{12}{17}}$.

Prof. Duta Mihaela, Rm. Valcea

NOTĂ:
Toate subiectele sunt obligatorii!
Timp de lucru: 3 ore

SUCCES!

Concursul Interjudetean Memorial “Preda Filofteia”
Editia a XXIII-a
1 aprilie 2017

CLASA A X-A 3 ORE

1. a) Sa se calculeze $\mathbf{z^{2020}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{z^{2017}}}$, pentru $\mathbf{z} = \frac{\mathbf{-1+i\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}$.
   b) Aratati ca, daca ε este solutie a ecuatiei $x^2 + x + 1 = 0$, atunci, pentru orice $a, b, c \in R$ are loc inegalitatea:
$$(a + b\varepsilon^{2017} + c\varepsilon^2)(a + b\varepsilon^{2018} + c\varepsilon) \geq 0.$$

Prof. Dinu Gigi-Daniel, Dragasani

2. a) Rezolvati in multimea numerelor reale ecuatia:
$$\log_3(9^x + 9) = x - \log_{\frac{1}{3}}(28 - 2 \cdot 3^x).$$
   b).Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x - 4^x = \sqrt{8^x - 16^x}$.

Prof. Neacsu Steluta, Calimanesti

3. a) Să se calculeze $\frac{a^6+b^6}{a^4-a^2b^2+b^4}$, unde a și b sunt numere naturale nenule.
   b. Să se rezolve ecuația $\sqrt[3]{(4+x)^2} + \sqrt[3]{(5-x)^2} = 3 + \sqrt[3]{(5-x)(4+x)}$.

Prof. Smarandache Valentin, Olanesti
Prof. Smarandache Cristina, Rm. Valcea

4. a. Stiind ca $a, b \in (0, \infty)$, demonstrati inegalitatea:
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$
   b. Demonstraţi că pentru orice $a, b, c \in (1, \infty)$ sau $a, b, c \in (0, 1)$ are loc inegalitatea:
$$\log_a(bc)\log_b(ca)\log_c(ab) \geq 8.$$

Prof. Predoană Tatiana, Liceul Sanitar Antim Ivireanu-Râmnicu Vâlcea

NOTĂ:
Toate subiectele sunt obligatorii!
Timp de lucru: 3 ore

SUCCES!

Concursul Interjudetean Memorial “Preda Filofteia”
Editia a XXIII-a
1 aprilie 2017

CLASA A XI-A 4 ORE

1. Fie multimea $M = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in R. \right\}$.
   a. Aratati ca daca $X \in M_2(R)$ are proprietatea $AX = XA$, unde $A \in M$, atunci $(\exists)\ x, y \in R$ astfel incat $X = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$.
   b. Rezolvati ecuatia $X^3 = \begin{pmatrix} 2017 & 2016 \\ 2016 & 2017 \end{pmatrix}, X \in M_2(R)$.

Prof. Duta Mihaela, Rm. Valcea

2. a. Aratati ca $Y^2 - \mathrm{Tr}Y \cdot Y + \det Y \cdot I_2 = O_2, \forall\, Y \in M_2(R)$.
   b. Determinati matricea $X \in M_2(R)$, stiind ca $X^3 - 6X^2 + 12X = \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$.

Deaconescu Radu, student UPIT

3. Fie functia $f: R \to R, f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x+1}, x \geq 0 \\ \frac{e^{\sqrt{x^2+4}} - e^2}{x} + a, x < 0, a \in R. \end{cases}$.

   a. Determinati $a \in R$ astfel incat f sa fie continua pe R .
   b. Aratati ca $(\exists)\ c \in (1,2)$, astfel incat $f(c) = 2$.

Prof. Duta Mihaela, Rm. Valcea

4. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}, x_1 > 0,\ x_{n+1} = \frac{x_n}{(x_n+1)^2+1}$. Să se studieze convergenţa şirurilor $(x_n)_{n\geq 1}, (n^k x_n)_{n\geq 1}, k > 0$.

Luigi-Ionuţ Catana
student, Universitatea Bucureşti, Facultatea de Matematică şi Informatică

NOTĂ:
Toate subiectele sunt obligatorii!
Timp de lucru: 3 ore

SUCCES!

Concursul Interjudetean Memorial “Preda Filofteia”
Editia a XXIII-a
1 aprilie 2017

Clasa a XI-a 3 ore

1. Fie multimea $M = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in R. \right\}$.
   a. Determinati o matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{M}$ cu $\det\mathrm{A} = 0$ si neavand toate elementele egale.
   b. Aratati ca daca $X \in M_2(R)$ are proprietatea $\mathrm{AX} = \mathrm{XA}$, unde $\mathrm{A} \in \mathrm{M}$, atunci $(\exists)\ x, y \in R$ astfel incat $X = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$.
   c. Rezolvati ecuatia $X^2 = \begin{pmatrix} 2017 & 2016 \\ 2016 & 2017 \end{pmatrix}, X \in M_2(R)$.

Prof. Dinu Gigi-Daniel, Dragasani

2. În reperul cartezian XOY se consideră punctele $\mathrm{A(m, m)}$, $\mathrm{B(1, m-2)}$, si $\mathrm{C}\ (-4, 2\mathrm{m}-1)$, unde $\mathrm{m} \in \mathrm{R}$.
   a) Să se arate că pentru orice $\mathrm{m} \in \mathrm{R}$, punctele A, B si C sunt vârfurile unui triunghi.
   b) Să se arate că $A_{\Delta ABC} \geq \frac{9}{2}, \forall\, m \in R$.

Prof. Smarandache Valentin, Olanesti
Prof. Smarandache Cristina, Rm. Valcea

3. Fie $\mathrm{f}: \mathrm{R} \backslash \{1\} \to \mathrm{R}, \mathrm{f}(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+\mathrm{c}}{\mathrm{x}-1}$.
   a) Sa se determine a, b, c, stiind ca dreapta y= x+1este asimptota oblica spre $+\infty$ si P(2;7) se afla pe graficul functiei f.
   b) Pentru a=1, c=3, determinati b stiind ca
$$\lim_{x\to\infty} x \ln\frac{f(x)}{x} = 2.$$

Prof. Dinu Maria, Dragasani

4. Se consideră funcţia $f: R\backslash\{1\} \to R, f(x) = x + \frac{m}{x-1}, m \in R^*$.
   a) Aflaţi ecuaţiile asimptotelor graficului funcţiei f.
   b) Fie M punctul de intersectie a asimptotelor functiei f. Arătaţi că simetricul oricarui punct al graficului funcţiei faţa de punctul M, aparţine graficului funcţiei date.
   c) Aflaţi valorile parametrului real m pentru care ecuaţia $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$ are două soluţii numere reale.

Prof. Barbu Daniela, Calimanesti

NOTĂ:
Toate subiectele sunt obligatorii!
Timp de lucru: 3 ore

SUCCES!

Concursul Interjudetean Memorial “Preda Filofteia”
Editia a XXIII-a
1 aprilie 2017

Clasa a XII-a 3 ore

1. Se considera pe $\boldsymbol{R}$ legea de compozitie $*$ definita astfel:
$x * y = xy - x - y + 2, \forall x, y \in R$.
   a) Sa se arate ca legea $*$ este asociativa.
   b) Sa se rezolve ecuatia:
   $x * x * x = x, x \in R$.
   c) Sa se calculeze:
   $\frac{2017}{2016} * \frac{2016}{2015} * \frac{2015}{2014} * \cdots * \frac{4}{3} * \frac{3}{2} * \frac{2}{1} * 2 * 3 * 4 * \cdots * 2017$

Prof. Dinu Maria-C.N. Gib Mihaescu

2. Fie functia $f: R \to R, f(x) = \begin{cases} x + a, x < -1 \\ 3x^2 + 1, x \geq -1. \end{cases}$
   a) Determinati $a \in R$ stiind ca f admite primitive pe R.
   b) Calculati $\int_{-1}^{1} x^{2017} \cdot \sqrt{f(x)} dx$.
   c) Determinati $m \in R$, pentru care aria suprafetei plane deteminate de G_f, axa OX si dreptele de ecuatii $x = m$ si $x = m + 1$, $m > -1$, este minima.

Prof. Smarandache Valentin, Olanesti
Prof. Smarandache Cristina, Rm. Valcea

3. Se considera polinomul f=$(2X^2 - X - 1)^{2017} \in R\,[X]$, cu radacinile $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2017} \in C$, f=$a_{4034}X^{4034} + a_{4033}X^{4033} + a_{4032}X^{4032} + \cdots + a_1X + a_0$ fiind forma algebrica a polinomului f.
   a) Aratati ca f se divide cu polinomul $(2X + 1)^{2017}$.
   b) Determinati a_{4033}.
   c) Calculati $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{4034}$.

Prof.Predoană Tatiana, Liceul Sanitar Antim Ivireanu-Râmnicu Vâlcea

4. Fie functia $f: \left(\frac{1}{2}; \infty\right) \to R,\ f(x) = \sqrt{2x - 1}$.
   a) Aratati ca orice primitiva a functiei f este convexa pe $\left(\frac{1}{2}; \infty\right)$.
   b) Determinati primitiva F a functiei f, pentru care $\lim_{x \to 1} F(x) = \frac{1}{3}$
   c) Stiind ca F este o primitiva a functiei f, aratati ca:
   $\int_1^5 f(x) \cdot F^{2017}(x) dx = \frac{3^{6054} - 1}{6054}$.

Prof. Dinu Maria, Dragasani

NOTĂ:
Toate subiectele sunt obligatorii!
Timp de lucru: 3 ore

SUCCES!

Concursul Interjudetean Memorial “Preda Filofteia”
Editia a XXIII-a
1 aprilie 2017

Clasa a XII-a 4 ore

1. Fie functiile $f_n: R \to R, n \in N, n \geq 1,\ f_1(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\ f_n = f_1 \circ f_{n-1}$, si $I_n = \int_0^n f_n(x)dx$, $n \in N, n \geq 1$.
   a) Calculati I_2.
   b) Aflati $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{I_n}{\sqrt{n}}$

Prof. Mihaela Molodeț- Liceul "George Țărnea"

2. Fie polinomul $\mathrm{f} = (\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1)^{2017} + (\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 1)^{2017} \in \mathrm{R}[\mathrm{X}]$ si $\mathrm{f} = \mathrm{a}_{4034}\mathrm{X}^{4034} + \mathrm{a}_{4033}\mathrm{X}^{4033} + \cdots + \mathrm{a}_1\mathrm{X} + \mathrm{a}_0$ forma sa algebrica.
   a. Determinati restul impartirii lui f la $\mathrm{X}^2 - 1$.
   b. Calculati $a_0 + a_2 + \cdots + a_{4034}$.
   c. Determinati a_{2017}.

Prof. Dinu Gigi-Daniel, C.N. Gib Mihaescu

3. Fie $G = (7; \infty)$si legea de compozitie $x * y = xy - 7x - 7y + 56, \forall\, x, y \in G$.
   a. Sa se determine doua elemente $x, y \in Q\setminus Z$, astfel incat $x * y \in N$.
   b. Sa se arate ca functia $\mathrm{f}: \mathrm{G} \to \mathrm{R}, \mathrm{f}(\mathrm{x}) = \ln(\mathrm{x} - 7)$, este un izomorfism intre grupurile $(\mathrm{G}.*)$ si $(\mathrm{R}, +)$.
   c. Calculati $9 * 10 * 11 * \cdots * 2021$.

Prof. Duta Mihaela, Rm. Valcea

4. Fie functia $f: (0; \infty) \to R, f(x) = \frac{1}{x(2016+lnx)(2017+lnx)}, x > 0$.
   a. Artati ca functia $G: (0; \infty) \to R$, $G(x) = ln(\alpha + lnx), \alpha > 0$, este o primitiva a functiei $g: (0; \infty) \to R, g(x) = \frac{1}{x(\alpha+lnx)}, (\forall)x > 0$.
   b. Calculati aria multimii marginite de graficul functiei f, axa OX si dreptele $x = 1, x = e$.
   c. Aratati ca orice primitiva a functiei f este strict crescatoare pe $[1; \infty)$.

Prof. Chitu Florin, Dragasani

NOTĂ:
Toate subiectele sunt obligatorii!
Timp de lucru: 3 ore

SUCCES!