INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN
DOLJ

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

**CONCURSUL DOLJEAN DE MATEMATICĂ**
**18 martie 2017**

## Clasa a IX-a

**1.** Fie șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ de numere naturale care verifică relația :

$$x_n = x_{n-1}^2 + x_{n-2}^2 + x_{n-3}^2\ , (\forall)n \geq 3\ .$$

Arătați că dacă există un termen $x_p = 2017$, atunci $p \leq 3$.

**Gabriel Tica**

**2.** Fie triunghiul $ABC$ și $f\colon [BC] \longrightarrow (0,\infty)$ definită prin $f(M) = d(A,M)$.

a) Pentru ce triunghi propoziția

$p$: "$(\forall M_1)(\forall M_2)\big[(M_1 \neq M_2) \longrightarrow \big(f(M_1) \neq f(M_2)\big)\big],\ M_1, M_2 \in [BC]$",

este adevărată?

b) Determinați mulțimea valorilor funcției $f$.

**Cristian Moanță**

**3.** Fie $a, b, c \in [0,\infty)$, astfel încât $a + b + c = 3$ .

a) Arătați că: $(1-a)(1-b)(1-c) + 2 \geq 2abc$ .

b) Determinați valoarea maximă a expresiei :

$E(a,b,c) = 2(a^3 + b^3 + c^3) + 15(ab + bc + ca) + 6abc$ .

**Dan Seclăman**

**4.** Se dă triunghiul $ABC$, $DE \parallel BC, D \in (AB), E \in (AC)$ și fie $\{T\} = BE \cap CD$ .

Arătați că există $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ astfel încât: $\overrightarrow{AT} = \alpha\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$ .

* * *

**Notă:**

- *Toate subiectele sunt obligatorii;*
- *Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte;*
- *Timp de lucru: 3 ore.*

**CONCURSUL DOLJEAN DE MATEMATICĂ**
**18 martie 2017**

## Clasa a X-a

**1.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale :

a) $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1$ ; b) $\sqrt{x+10}\geq 2-x$ .

**R.M.C. 1/2016-2017**

**2.** a) Rezolvați în **R** ecuația: $(2^x-1)^2=\log_2\left(\sqrt{x}+1\right)$.

b) Determinați numerele reale $x, y$ astfel încât: $\begin{cases} 2^{x^2}+2^{\frac{1}{y^2}}=2^{y+\frac{1}{x}} \\ 2^{y^2}+2^{\frac{1}{x^2}}=2^{x+\frac{1}{y}} \end{cases}$ .

* * *

**3.** Fie $=\{x_1, x_2, \ldots, x_{2015}\}, x_i \in \mathbf{Z}, (\forall)\ i \in \{1,2,\ldots,2015\}$ și $f\colon A \to A$, astfel încât $f o f o f = 1_A$. Arătați că există $(3k+2)$ valori , $k \in \{0,1,2,\ldots,671\}$, pentru care $|f(x_k)-x_k|<1$.

**Cristian Moanță**

**4.** Determinați numerele complexe $z_1, z_2, z_3$ având părțile reale numere cel mult egale cu zero, știind că există $a, b, c \in (0,\infty)$, astfel încât:

$$|a-z_1|^2+|b-z_2|^2+|c-z_3|^2 \leq 2(a|z_1|+b|z_2|+c|z_3|).$$

**Dan Seclăman**

**Notă:**

- *Toate subiectele sunt obligatorii;*
- *Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte;*
- *Timp de lucru: 3 ore.*

**CONCURSUL DOLJEAN DE MATEMATICĂ**
**18 martie 2017**

## Clasa a XI-a

**1.** a) Să se arate că ecuația $X^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ nu are soluţii în $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

b) Fie $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ . Să se calculeze $A^n, n \in \mathbf{N}^*$ .

* * *

**2.** Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), n \geq 2,$ fixat, astfel încât $(A - B)^2 = O_n$ și $AB = BA$. Dacă $a \in \mathbf{R}$ cu $|a| < 2$, demonstrați că: $\det(I_n - a(A + B) + a^2 AB) \geq 0$.

**Dan Seclăman**

**3.** Arătați că dacă $a, b \in \mathbf{R}$ și $\left|2^x + 3^{\sin x} + ax + b\right| \leq |x^3|, (\forall)x \in (-1,1)$ , atunci $a = -\ln 6$ .

**R.M.C. 1/2016-2017**

**4.** Fie $I \subset \mathbf{R}$ interval , $f: I \to \mathbf{R}$, o funcție continuă, neconstantă și $\big(x_1, f(x_1)\big)$, $\big(x_2, f(x_2)\big)$ două puncte consecutive de extrem local. Demonstrați că unul dintre acestea este punct de minim și celălalt este punct de maxim.

* * *

**Notă:**
- *Toate subiectele sunt obligatorii;*
- *Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte;*
- *Timp de lucru: 3 ore.*

**CONCURSUL DOLJEAN DE MATEMATICĂ**
**18 martie 2017**

## Clasa a XII-a

**1.** Pe mulímea $G = \mathbf{R}^* \mathrm{x}\, \mathbf{R}$ se definește legea de compoziție "o " prin:

$$(a,b) \circ (c,d) = (ac, bc+d).$$

a) Demonstrați că $(G, \circ)$ este grup necomutativ.
b) Arătați că în $G$ există o infinitate de elemente de ordinul 2. Există în $G$ elemente de ordinul 3?

* * *

**2.** Fie $A$ un inel cu proprietatea: $(ab)^2 = a^2b^2, (\forall) a, b \in A$. Să se arate că $A$ este comutativ.

* * *

**3.** a) Arătați că: $\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1} + \operatorname{arctg}\frac{1-x}{2-x} = \operatorname{arctg}\frac{1+2x-2x^2}{2}$ , $(\forall) x \in [0,1]$ .

b) Calculați: $= \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}}{\operatorname{arctg}\frac{1+2x-2x^2}{2}} \mathrm{d}x$ .

* * *

**4.** Fie $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$, o funcție continuă și concavă pe $[0,1]$, iar $m \in \mathbf{R}, m \geq 2$.
Să se arate că: $\int_{\frac{1}{m}}^1 f(x)\mathrm{d}x \geq \frac{m-1}{m^2} \cdot f(1) + \left(\frac{m-1}{m}\right)^2 \cdot \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ .

**R.M.C. 1/2016-2017 (L.1232,autor Cristian Moanță)**

**Notă:**

- *Toate subiectele sunt obligatorii;*
- *Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte;*
- *Timp de lucru: 3 ore.*