Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 18 martie 2017

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a V-a

Problema 1. Un număr natural se micşorează cu 2017 dacă îi ştergem ultimele două cifre. Care este numărul?

Gazeta Matematică

Soluţie. Fie numărul căutat $\overline{a_1a_2\dots a_{n-2}a_{n-1}a_n}$, deci $\overline{a_1a_2\dots a_{n-2}a_{n-1}a_n} - 2017 = \overline{a_1a_2\dots a_{n-2}}$, adică $\overline{a_1a_2\dots a_{n-2}a_{n-1}a_n} - \overline{a_1a_2\dots a_{n-2}} = 2017$. Pe de altă parte $\overline{a_1a_2\dots a_{n-2}a_{n-1}a_n} - \overline{a_1a_2\dots a_{n-2}} > 10^{n-1} - 10^{n-2} = 9\cdot 10^{n-2}$, deci $2017 > 9\cdot 10^{n-2}$, rezultă $n-2 \leq 2$, adică $n \leq 4$, iar numărul căutat este cel puţin 2017, deci are exact patru cifre. .... **2 p**

$\overline{abcd} = 2017 + \overline{ab} \leq 2017 + 99 = 2116$ şi $\overline{abcd} \geq 2017$, deci $a = 2$ .... **2 p**

Astfel $\overline{2bcd} = 2017 + \overline{2b} \leq 2017 + 29 = 2046$, deci $b = 0$. .... **2 p**

În consecinţă numărul căutat este $2017 + 20 = 2037$. .... **1 p**

Problema 2. Aflaţi numerele naturale prime a, b, c, dacă $a = b^4 + c^3$ şi $a \leq 2017$.

Soluţie. $a \geq 2^4 + 2^3 > 2$ este număr prim, deci este impar. Astfel unul din numerele prime b şi c este 2. .... **1 p**

Cazul I. Dacă $b = 2$, atunci $a = 16 + c^3 \leq 2017$, deci $c \leq 11$, de unde $c \in \{3, 5, 7, 11\}$

Pentru fiecare caz în parte avem $a = 43$ prim, $a = 141$ nu e prim, $a = 359$ prim şi $a = 1347$ nu este prim. În acest caz obţinem soluţiile $a = 43, b = 2, c = 3$ şi $a = 359, b = 2, c = 7$ .... **3 p**

Cazul I. Dacă $c = 2$, atunci $a = b^4 + 8 \leq 2017$, deci $b \leq 5$, de unde $b \in \{3, 5\}$

Pentru $b = 3$ avem $a = 89$ prim, pentru $b = 5$ obţinem $a = 633$ nu e prim. Deci în acest caz obţinem soluţia $a = 89, b = 3, c = 2$ .... **3 p**

Problema 3. Considerăm mulţimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 2017\}$. Determinaţi numărul submulţimilor $B \subset A$ cu trei elemente care îndeplinesc simultan condiţiile:

(a) cel puţin două elemente din mulţimea B sunt numere naturale consecutive;

(b) există $a \in B$ pentru care $3a \in B$.

Soluţie. Mulţimile căutate conţin elemente $a, 3a$ cu $3a \leq 2017$, deci $a \leq 672$. .... **1 p**

Pentru $a = 1$ avem $\{1, 3\} \subset B$, deci avem mulţimile $\{1, 2, 3\}$ şi $\{1, 3, 4\}$. .... **2 p**

Pentru $a \in 2, 3, 4, \dots, 672$ avem mulţimile $\{a-1, a, 3a\}$, $\{a, a+1, 3a\}$, $\{a, 3a-1, 3a\}$ şi $\{a, 3a, 3a+1\}$ toate distincte, în total $4 \cdot 671 = 2684$. .... **3 p**

Deci în total avem 2686 de mulţimi cu proprietatea din enunţ. .... **1 p**

Problema 4. Găsiţi toate modurile de colorare cu roşu sau verde a numerelor $1, 2, ..., 10$ astfel încât să îndeplinească condiţiile:

(a) numărul 5 să fie colorat cu roşu;

(b) dacă numerele x şi y sunt de culori diferite şi $x + y \leq 10$, atunci numărul $x + y$ trebuie colorat cu verde;

(c) dacă numerele x şi y sunt de culori diferite şi $xy \leq 10$, atunci numărul xy trebuie colorat cu roşu.

Soluţie. Dacă 1 este colorat cu roşu, atunci pentru orice $a > 1$ verde, avem $1 \cdot a = a$ clorat cu roşu. Contradicţie. Deci în acest caz toate numerele sunt colorate cu roşu. .... **1 p**

În continuare considerăm 1 colorat cu verde.

Dacă 2 este roşu, atunci $1 + 2 = 3$ este verde, deci $2 + 3 = 5$ este verde. Contradicţie. Deci 2 este verde.

Dacă 3 este roşu, atunci $2 + 3 = 5$ este verde. Contradicţie. Deci 3 este verde.

Dacă 4 este roşu, atunci $1 + 4 = 5$ este verde. Contradicţie. Deci 4 este verde. .... **3 p**

5 este diferit de $1, 2, 3$ şi 4, astfel $1 + 5 = 6$ este verde, $2 + 5 = 7$ este verde, $3 + 5 = 8$ este verde, $4 + 5 = 9$ este verde şi $2 \cdot 5 = 10$ este roşu. Numerele $6, 7, 8, 9, 10$ nu se pot obţine altfel ca produs sau sumă dintre 5 şi un alt număr, deci această colorare îndeplineşte condiţiile din enunţ.

În consecinţă avem două colorări:

Toate colorate în roşu sau 5 şi 10 colorate cu roşu şi restul verde. .... **3 p**